DS 12 (B)

Devoir surveillé du Samedi 30 Mars

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

Exercice 1

Soit f la fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \ f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Partie 1

1. Justifier que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
   (b) Déterminer les points critiques de f.
3. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.
   (b) Vérifier que f ne présente un extremum local qu'en un seul de ses points critiques et préciser sa nature et sa valeur.
4. Cet extremum est-il global ?

Partie 2

On note g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x, 1).$$

5. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, l'équation $g(x) = n$, d'inconnue x, possède une unique solution que l'on notera u_n.
6. On note h la restriction de g à $[1, +\infty[$.
   (a) Dresser le tableau de variations de h^{-1}.
   (b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
   (c) En déduire, en revenant à la définition de u_n, le réel α pour lequel on a : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n^\alpha$.

Exercice 2

On désigne par Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $A^2 - 4A$ puis déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.
2. (a) En déduire la seule valeur propre de A.
   (b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?
3. Déterminer une base (u_1, u_2) du sous-espace vectoriel $Ker(f - 2Id)$.
4. (a) On pose $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Vérifier que la matrice T de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est triangulaire et que ses éléments diagonaux sont tous égaux à 2.

(c) En écrivant $T = 2I + N$, déterminer, pour tout entier naturel n, la matrice T^n comme combinaison linéaire de I et N, puis de I et T.

5. (a) Expliquer pourquoi l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = n2^{n-1}A - (n-1)2^n I.$$

(b) Utiliser le polynôme annulateur obtenu à la première question pour déterminer A^{-1} en fonction de I et de A.

(c) Vérifier que la formule trouvée à la question 5.(a) reste valable pour $n = -1$.

Exercice 3

On dispose de deux pièces identiques donnant pile avec la probabilité p, élément de $]0, 1[$, et face avec la probabilité $q = 1 - p$.

Partie 1 : Un jeu naïf.

Deux joueurs A et B s'affrontent lors de lancers de ces pièces de la façon suivante, les lancers de chaque pièce étant supposés indépendants.

Pour la première manche, A et B lancent chacun leur pièce simultanément jusqu'à ce qu'ils obtiennent pile, le gagnant du jeu étant celui qui a obtenu pile le premier. En cas d'égalité et en cas d'égalité seulement, les joueurs participent à une deuxième manche dans les mêmes conditions et avec la même règle, et ainsi de suite jusqu'à la victoire de l'un d'entre eux.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note X_k (resp. Y_k) la variable aléatoire égale au rang d'obtention du premier pile par A (resp. par B) lors de la k-ième manche.

On note, toujours pour k dans $\mathbb{N}^*$, E_k l'événement : "Il y a égalité à la fin de la k-ième manche".

On note E l'événement : "Il y a perpétuellement égalité".

On note G (resp. H) l'événement : "A (resp. B) gagne à ce jeu", et pour tout entier naturel n non nul, on note G_n (resp. H_n) l'événement : "A (resp. B) gagne le jeu à la n-ième manche".

1. Étude de la première manche.

(a) Donner la loi commune à X_1 et Y_1. En déduire qu'il est quasi-impossible que la première manche dure éternellement. On admet alors qu'il en est de même pour chaque manche jouée.

(b) Écrire l'événement E_1 à l'aide des variables X_1 et Y_1.

(c) Montrer que $P(E_1) = \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} P(X_1 = i)P(Y_1 = i)$ et en déduire l'expression explicite de $P(E_1)$ en fonction de p et q.

(d) Justifier sans aucun calcul que les événements G_1 et H_1 sont équiprobables. En déduire la probabilité de G_1 en fonction de p et q.

2. Calcul de la probabilité de l'événement G.

(a) Écrire, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, l'événement G_n à l'aide des événements E_k et de l'événement $(X_n < Y_n)$.

(b) Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, calculer $P_{E_1 \cap \ldots \cap E_{k-1}}(E_k)$ puis en déduire :

$$\forall n \geq 2, \quad P(G_n) = \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{q}{1+q}.$$

(c) Vérifier que le résultat précédent reste valable pour $n = 1$.

(d) Exprimer G en fonction des G_n puis conclure, après calcul, que : $P(G) = \dfrac{1}{2}$.

(e) Expliquer comment obtenir la probabilité de l'événement H : ”B gagne à ce jeu” et en déduire que ce jeu a presque sûrement une fin, que $P(E) = 0$.

Partie 2 : Un autre jeu.
En parallèle du jeu précédent, A parie sur le fait que la manche gagnée par le vainqueur le sera par un lancer d'écart et B parie le contraire.

3. (a) À l'aide du système complet d'événements $(X_1 = i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, montrer que :

$$P(Y_1 = X_1 + 1) = \frac{pq}{1+q}.$$

   (b) En déduire la probabilité u que l'un des deux joueurs gagne à la première manche par un lancer d'écart.

4. (a) Utiliser les événements E_k pour écrire l'événement K_n ”l'un des deux joueurs gagne à la n-ième manche par un lancer d'écart”, ceci pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

   (b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de $P(K_n)$.

5. Donner finalement la probabilité de l'événement K: ”A gagne ce pari”.

Partie 3 : Informatique.
On rappelle que la commande `rd.geometric(p)` permet à `Python` de simuler une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

6. Compléter le script `Python` suivant pour qu'il simule l'expérience décrite dans la partie 1 et affiche le nom du vainqueur du premier jeu ainsi que le numéro de la manche à laquelle il a gagné.

```
p = float(input('Entrez une valeur pour p:'))
c = 1
X = rd.geometric(p)
Y = rd.geometric(p)
while X == Y :
    X = .....
    Y = .....
    c = .....
if X < Y :
    .....
else :
    .....
print(c)
```

7. Compléter la commande suivante afin qu'une fois ajoutée au script précédent elle permette de simuler le deuxième jeu et d'en donner le nom du vainqueur.

```
if ..... :
    print('A gagne le deuxième jeu')
else :
    .....
```

Exercice 4

Partie 1 : Étude de quelques propriétés d'une variable aléatoire X

Dans cette exercice, θ désigne un réel élément de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta x^{1+\frac{1}{\theta}}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$.

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité.

On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f et on note F sa fonction de répartition.

2. Montrer que X possède une espérance et une variance et les déterminer.
3. Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F(x)$ en fonction de x et θ.
4. (a) Montrer que l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ possède une seule solution, notée M_e, que l'on déterminera.
   (b) Montrer que : $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $2^x(1-x) \leq 1$.
   (c) Comparer $E(X)$ et M_e.
5. Soit a un réel supérieur ou égal à 1 et b un réel strictement positif.
   (a) Montrer que $P_{(X>a)}(X > a+b) = \left(\dfrac{a}{a+b}\right)^{1/\theta}$.
   (b) Déterminer la limite de cette quantité lorsque a tend vers $+\infty$. Interpréter cette dernière valeur si l'on admet que la variable X représente la durée de vie d'un certain appareil.

Partie 2 : Simulation de X

6. On pose $Y = \ln(X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X. On note G sa fonction de répartition.
   (a) Pour tout réel x, exprimer $G(x)$ à l'aide de la fonction F.
   (b) En déduire que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
7. On rappelle qu'en `Python`, la commande `rd.exponential(1/lambda)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.
   Écrire des commandes `Python` permettant de simuler X.

Partie 3 : Estimation d'un paramètre

On suppose dans la suite que le paramètre θ est inconnu et on souhaite en trouver une estimation ponctuelle puis par intervalle de confiance.
On considère pour cela n variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ toutes définies sur le même espace probabilisé, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que Y.

8. On pose $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.
   (a) Justifier que T_n est un estimateur de θ.
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de T_n.
9. (a) Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable T_n.
   (b) Établir l'inégalité : $\forall \varepsilon > 0, \quad P\Big(\theta \in [T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon]\Big) \geq 1 - \dfrac{\theta^2}{n\varepsilon^2}$.
   (c) En utilisant le fait que $\theta \leq \frac{1}{2}$, déterminer un intervalle de confiance pour θ au niveau de confiance 90% lorsqu'on choisit $n = 1000$.