DS 1 (A)

# Devoir surveillé du Samedi 4 Septembre

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

## Exercice 1

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}.$$

1. Construire une procédure Scilab qui, étant donné un entier naturel $n$, permet de calculer et d'afficher $u_n$ et $v_n$.
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{4}(v_n - u_n)$.

   (b) En déduire que, pour tout entier naturel $n$, $v_n - u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$.
3. (a) Étudier la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (b) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite $\ell$.

   (c) Construire une procédure Scilab qui, étant donné $\varepsilon > 0$, permet d'obtenir une approximation de $\ell$ avec une précision $\varepsilon$.
4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $w_k = v_k - u_k$ et on considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$.

   (a) Exprimer $S_n$ en fonction de $n$, à l'aide de la question 2.(b).

   (b) Vérifier que, pour tout entier $k \geq 1$, $w_k = \frac{u_k - u_{k-1}}{2}$.

   En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \frac{u_n + 1}{2}$.

   (c) Avec les deux questions précédentes, exprimer $u_n$ en fonction de $n$, puis en déduire la valeur de $\ell$.

---

## Exercice 2

On considère la fonction $f$ définie par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{x - 1 + \ln(x)}{x^2}.$$

On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de $f$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de $f$. Est-ce que $f$ est continue et dérivable sur $\mathcal{D}_f$ ?
2. On introduit la fonction auxiliaire $g$ définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^3 - x + 3 - 2\ln(x)$ et la fonction polynôme $P$ définie par $P(x) = 3x^3 - x - 2$.

   (a) Factoriser le polynôme $P$.

   (b) En déduire le signe de $P$ sur $\mathbb{R}$.

   (c) Exprimer $g'$ en fonction de $P$ puis dresser le tableau de variation de $g$.

   (d) Montrer que, pour tout $x > 0$, $g(x) > 0$.

3. (a) Vérifier que la dérivée de $f$ peut s'écrire, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, sous la forme : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.
   (b) En déduire les variations de $f$. On précisera les limites de $f$ aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
   (c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathcal{D}_f$, que l'on notera $\alpha$.
   Vérifier alors que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.
4. (a) Montrer que la droite $\Delta$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
   (b) On pose, pour tout $x > 0$, $h(x) = x - 1 + \ln(x)$. Étudier les variations de $h$.
   (c) Calculer $h(1)$. En déduire le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (d) En déduire le signe de $f(x) - (x + 1)$, puis la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de $\Delta$.
5. (a) Donner les instructions Scilab pour tracer sur une même fenêtre graphique $\mathcal{C}_f$ et $\Delta$ sur l'intervalle $[\frac{1}{2}, 5]$.
   (b) Dessiner l'allure de $\mathcal{C}_f$ ainsi que la droite $\Delta$.

---

## Exercice 3

On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

1. Écrire une procédure Scilab qui, étant donné un entier $n \geq 1$, calcule et affiche $S_n$.
2. L'objectif de cette question est de démontrer que, pour tout $x \geq 0$,
$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x. \qquad (1)$$
   (a) On considère la fonction $f(x) = x - \ln(1 + x)$.
   Étudier les variations de $f$ et en déduire le signe de $f$ sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) On considère la fonction $g(x) = \ln(1 + x) - x + \dfrac{x^2}{2}$.
   Étudier les variations de $g$ et en déduire le signe de $g$ sur $\mathbb{R}_+$.
   (c) En déduire les inégalités (1).
3. Soit $n$ un entier naturel non nul.
   (a) En utilisant les inégalités (1), montrer que, pour tout $1 \leq k \leq n$,
$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leq \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}. \qquad (2)$$
   (b) En sommant les inégalités (2), en déduire l'encadrement suivant :
$$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq S_n \leq \frac{n+1}{2n}.$$
4. (a) Calculer les limites $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}$.
   (b) En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.
5. On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.
   Faire le lien entre les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis en déduire que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

## Exercice 4

1. Soit $f$ la fonction définie par :
$$f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}.$$
On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de $f$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de $f$, puis les limites de $f$ aux bornes de $\mathcal{D}_f$. Que peut-on en déduire sur $\mathcal{C}_f$ ?
   (b) Étudier les variations de $f$.
   (c) Calculer l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ en 0.
   (d) Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{T}$. Préciser les points d'intersection.
   (e) Tracer $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{T}$ dans un même repère orthonormé.

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{u_n}{u_n^2+u_n+1}. \end{cases}$$
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul $n$, $f(\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n+1}$.
   (b) En déduire par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$.
   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3. (a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \frac{1}{u_n}$.
   (b) En déduire, par récurrence et à l'aide de la question 2.(b) que pour tout entier $n \geq 1$,
$$\frac{1}{u_n} \leq n+1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$
   (c) i. Montrer que, pour tout $x \in ]-1,+\infty[$, $\ln(1+x) - x \leq 0$.
      ii. Vérifier que, pour tout entier $k \geq 2$, $\frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$ (on pourra prendre $x = -\frac{1}{k}$ dans l'inégalité précédente).
      iii. En déduire que, pour tout $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \leq \ln(n)$.
   (d) Montrer que, pour tout $n \geq 2$,
$$\frac{1}{u_n} \leq n+2+\ln(n)$$
   (e) A l'aide de la question précédente et de la question 2.(b), donner un encadrement de $nu_n$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$.