DS 3 - Sujet A

Devoir surveillé du Mercredi 8 Novembre

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $]0,1[$ par :

$$f : x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}.$$

Partie A : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0,1[, \ f'(x) = \frac{1}{x\,(1-x)\,\big(\ln(x)\big)^2}\,\big(-x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x)\big).$$

2. (a) Justifier : $\forall t \in]0,1[, \ t\ln(t) < 0$.

   (b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0,1[$.

3. (a) Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
   On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser $f(0)$.

   (b) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

4. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, en faisant figurer la tangente en 0 et les branches infinies éventuelles.

Partie B : Étude d'une suite

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, (E_n) l'équation : $x^n + x - 1 = 0$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x \mapsto x^n + x - 1$.

   En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ que l'on note u_n.

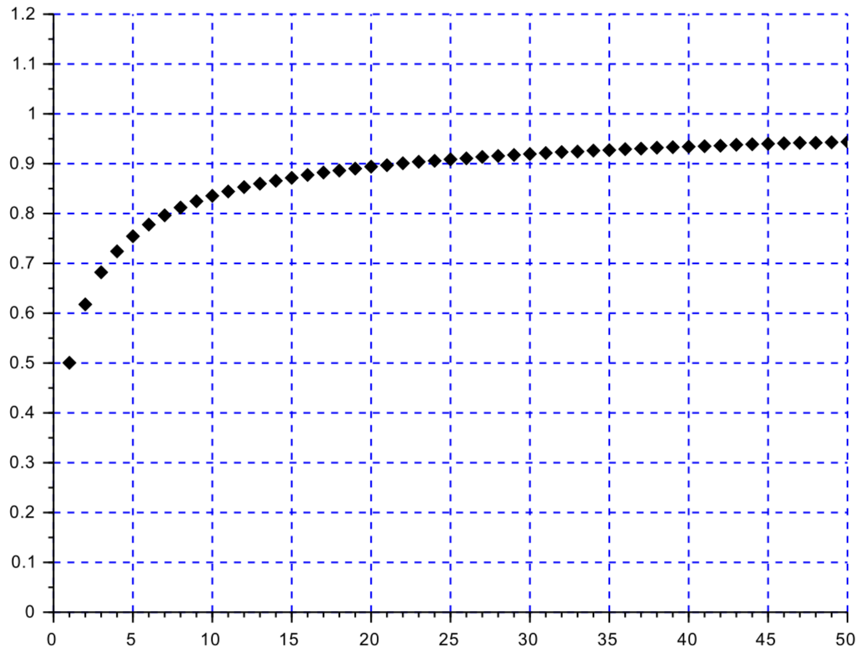
7. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n appartient à l'intervalle $]0,1[$.

8. Déterminer u_1 et u_2.

9. (a) Recopier et compléter la fonction `Python` suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
def valeur_approchee(n)
    a = 0
    b = 1
    while ..... :
        c = (a+b) / 2
        if c^n+c-1>0 :
            .....
        else
            .....
    return( ..... )
```

(b) On représente alors les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et on obtient le graphe suivant.



Quelles conjectures peut-on faire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ concernant sa monotonie, sa convergence et son éventuelle limite ?

10. (a) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $f(u_n) = n$.
    (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
    (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

Exercice 2

Partie A

On considère les matrices :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Calculer A^2 puis vérifier que A^3 est la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) Justifier que 0 est l'unique valeur propre de A.
   (c) La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. (a) Démontrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
   (b) Déterminer la matrice T vérifiant la relation $A = PTP^{-1}$.

Partie B

On considère la matrice :

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Déterminer deux réels α et β tels que $M = \alpha A + \beta I$, où I est la matrice identité d'ordre 3.
   (b) À l'aide de la question 1.(a), calculer $(M - I)^3$.
   En déduire que M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction des matrices I, M et M^2.

(c) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer M^n pour tout entier naturel n, en fonction des matrices I, A et A^2.
Cette formule est-elle vérifiée pour $n = -1$?

Partie C

Dans cette partie, on cherche à résoudre l'équation matricielle $X^2 = A$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Supposons que cette équation admette une solution $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

4. (a) On pose $Y = P^{-1}XP$. Montrer que : $Y^2 = T$.
   (b) En déduire que : $YT = TY$.
   (c) En déduire qu'il existe trois réels a, b, c tels que :
$$Y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$
   (d) Calculer Y^2 en fonction de a, b et c, puis en utilisant l'hypothèse $Y^2 = T$, obtenir une contradiction.
   (e) Conclure.

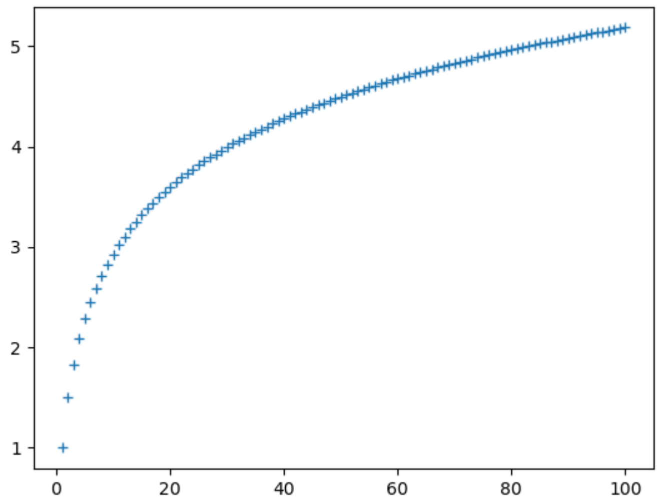
Exercice 3

On considère la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$. On note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ la n-ième somme partielle de cette série.

1. On considère le programme `Python` suivant :

```
U = np.arange(1.,101.)
V = np.cumsum(U**(-1))
plt.plot(U,V,'+')
plt.show()
```

En exécutant ce programme, on obtient le graphe suivant :



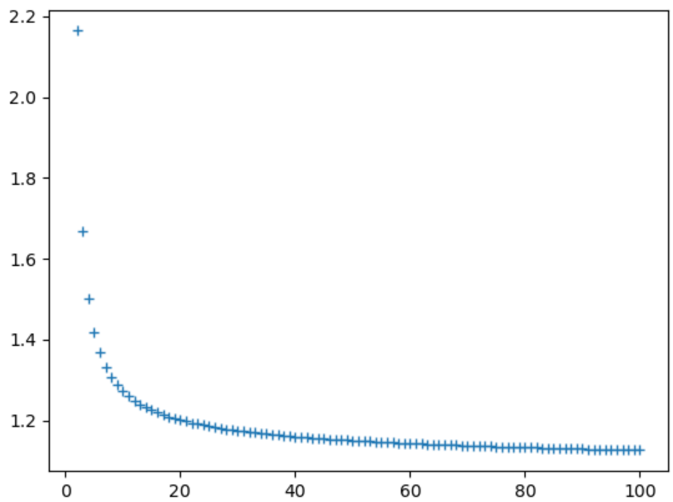
Que contient la variable `U` ? Et la variable `V` ? Que fait ce programme ? Quel résultat du cours le graphe obtenu illustre-t-il ?

2. Écrire en `Python` une fonction `seuil` qui retourne le premier entier naturel N tel que $H_N \geq 10$.

3. On considère le programme `Python` suivant :

```python
U = np.arange(2.,101.)
V = 1+np.cumsum(U**(-1))
W = np.log(U)
T = V/W
plt.plot(U,T,'+')
plt.show()
```

En exécutant ce programme, on obtient le graphe suivant :



Que contiennent les variables `U`, `V`, `W` et `T` ? Que fait ce programme ? Que peut-on conjecturer à partir du graphe obtenu ?

4. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = H_n - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = H_n - \ln(n+1).$$

(a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $\dfrac{1}{n+1} \leq \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t}dt \leq \frac{1}{n}$.

(b) En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. On notera γ leur limite commune.

(c) Écrire en `Python` une fonction `gamma` qui, étant donné un réel $\varepsilon > 0$, retourne une approximation de γ à ε près.

Exercice 4

On lance une pièce équilibrée.
On note Z la variable aléatoire égale au rang du lancer où l'on obtient le premier "pile".
Après cette série de lancers, si Z a pris la valeur k ($k \in \mathbb{N}^*$), on remplit une urne de k boules numérotées $1, 2, \ldots, k$, puis on extrait au hasard une boule de cette urne.
On note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée après la procédure décrite ci-dessus.

1. On suppose dans cette question qu'on a importé sur `Python` les librairies `numpy` avec le raccourci `np` et `numpy.random` avec le raccourci `rd`.

(a) On rappelle que la commande :

- `rd.randint(a, b+1)` retourne un nombre choisi aléatoirement suivant la loi $\mathcal{U}(\llbracket a, b\rrbracket)$;
- `rd.binomial(n, p)` retourne un nombre choisi aléatoirement suivant la loi $\mathcal{B}(n, p)$;

- `rd.geometric(p)` retourne un nombre choisi aléatoirement suivant la loi $\mathcal{G}(p)$;
- `rd.poisson(lambda)` retourne un nombre choisi aléatoirement suivant la loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

Compléter la fonction `simulX()` suivante pour qu'elle simule l'expérience aléatoire décrite dans ce problème et retourne la valeur prise par X.

```
def simulX() :
    Z = .....
    X = .....
    return(X)
```

(b) On ajoute les instructions suivantes à la suite du programme précédent :

```
S = np.zeros(10000)
for k in range(10000) :
    S[k] = simulX()
print(np.mean(S))
```

Expliquer ce que fait ce programme.

(c) Après exécution, `Python` retourne la valeur `1.5149`. Comment interpréter ce résultat ?

2. Établir la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$.

3. Rappeler la loi de Z ainsi que son espérance et sa variance.

4. (a) Pour tout couple (i,k) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité $P_{(Z=k)}(X=i)$.

   (b) En déduire que : $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ P(X=i) = \displaystyle\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$.

   (c) On admet dans cette question que $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k}$. Vérifier que $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} P(X=i) = 1$.

5. (a) Montrer que, pour tout entier naturel i non nul, on a : $iP(X=i) \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{i-1}$.

   (b) En déduire que X possède une espérance.

   (c) Montrer, en admettant qu'il est licite de permuter les symboles $\sum$ comme dans la question 4.(c), que
$$E(X) = \frac{3}{2}$$

6. (a) Utiliser le résultat de la question 5.(a) pour montrer que X a un moment d'ordre 2.

   (b) Établir, alors, toujours en admettant qu'il est licite de permuter les symboles $\sum$ comme dans la question 4.(c), que
$$E\left(X^2\right) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)(2k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

   (c) Déterminer les réels a, b et c tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ (k+1)(2k+1) = ak(k-1) + bk + c$.

   (d) En déduire la valeur de $E\left(X^2\right)$ et vérifier que $V(X) = \dfrac{11}{12}$.

7. On admet que, si une variable aléatoire X admet une variance, alors on a :
$$\forall \varepsilon > 0,\ P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2} \quad \text{(Inégalité de Bienaymé-Chebychev).}$$
En utilisant ce résultat, montrer que $P(X \geq 3) \leq \dfrac{11}{27}$.

8. On se propose de calculer $P(X=1)$, $P(X=2)$ et $P(X \geq 3)$.

   (a) Écrire explicitement en fonction de x et n la somme $\sum_{k=1}^{n} x^{k-1}$ (n désignant un entier naturel non nul et x un réel différent de 1).

   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \ln(2) - \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x}dx.$

   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x}dx \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$

   En déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x}dx.$

   (d) Établir alors que $P(X=1) = \ln(2)$ puis donner la valeur de $P(X=2)$.

   (e) Utiliser les résultats précédents pour calculer $P(X \geq 3)$, puis donner une valeur approchée de $P(X \geq 3)$ en prenant $\ln(2) \simeq 0,7$.
