

DS 3 - Sujet B

Devoir surveillé du Mercredi 8 Novembre

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

Exercice

1. Dans cette question, on considère les matrices $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$

et le produit matriciel $M = CL$.

- (a) i. Calculer M et M^2 .
 ii. Déterminer le rang de M .
 iii. La matrice M est-elle diagonalisable ?

- (b) i. Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible et calculer le produit $P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- ii. Trouver une matrice inversible Q dont la transposée tQ vérifie : ${}^tQ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- iii. Pour une telle matrice Q , calculer le produit PMQ .

2. La fonction Python suivante permet de multiplier la i -ème ligne L_i d'une matrice A par un réel sans modifier ses autres lignes, c'est-à-dire de lui appliquer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow aL_i$ (où $a \neq 0$).

```

1 | def multlig(a, i, A):
2 |     n, p = np.shape(A)
3 |     for j in range(p):
4 |         A[i, j] = a*A[i, j]
5 |     return(A)

```

- (a) Donner le code Python de deux fonctions `addlig` (d'arguments `b, i, j, A`) et `echlig` (d'arguments `i, j, A`) permettant d'effectuer respectivement les deux autres opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice :

$$L_i \leftarrow L_i + bL_j \quad (i \neq j) \quad \text{et} \quad L_i \leftrightarrow L_j \quad (i \neq j).$$

- (b) Expliquer pourquoi la fonction `multligmat` suivante retourne le même résultat `B` que la fonction `multlig`.

```

1 | def multligmat(a, i, A):
2 |     n, p = np.shape(A)
3 |     D = np.eye(n, n)
4 |     D[i, i] = a
5 |     A = np.dot(D, A)
6 |     return(A)

```

3. Dans cette question, on note n un entier supérieur ou égal à 2 et M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

Pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à l'intersection de sa i -ème ligne et de sa j -ème colonne, qui vaut 1.

- (a) i. Justifier l'existence d'une matrice-colonne non nulle $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et d'une matrice-ligne non nulle $L = (\ell_1 \ \dots \ \ell_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telles que $M = CL$.
- ii. Calculer la matrice MC et en déduire une valeur propre de M .
- iii. Montrer que, si le réel $\sum_{i=1}^n c_i \ell_i$ est différent de 0, alors la matrice M est diagonalisable.
- (b) On suppose dans cette question que $\sum_{i=1}^n c_i \ell_i$ est différent de 0.
- i. Établir l'existence de deux matrices inversibles P et Q telles que $PMQ = E_{1,1}$.
- ii. En déduire que, pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, il existe deux matrices inversibles P_i et Q_j telles que $P_i M Q_j = E_{i,j}$.
On pourra considérer les matrices $P_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{j,i} + E_{i,j}$ et calculer le produit $P_{1,i} E_{1,1} P_{1,j}$.

Problème

Dans ce problème, on définit et on étudie les fonctions génératrices des moments et les fonctions génératrices des cumulants de variables aléatoires discrètes ou à densité.

Les cumulants d'ordre 3 et 4 permettent de définir des paramètres d'asymétrie et d'aplatissement qui viennent compléter la description usuelle d'une loi de probabilité par son espérance (paramètre de position) et sa variance (paramètre de dispersion) ; ces cumulants sont notamment utilisés pour l'évaluation des risques financiers.

Dans tout le problème :

- on note (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et toutes les variables aléatoires introduites dans l'énoncé sont des variables aléatoires réelles définies sur (Ω, \mathcal{A}) ;
- sous réserve d'existence, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X sont respectivement notées $E(X)$ et $V(X)$;
- pour toute variable aléatoire X et pour tout réel t pour lesquels la variable aléatoire e^{tX} admet une espérance, on pose :

$$M_X(t) = E(e^{tX}) \quad \text{et} \quad K_X(t) = \ln(M_X(t)) ;$$

(les fonctions M_X et K_X sont respectivement appelées la *fonction génératrice des moments* et la *fonction génératrice des cumulants* de X)

- lorsque, pour un entier $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction K_X est de classe \mathcal{C}^p sur un intervalle ouvert contenant l'origine, on appelle *cumulant d'ordre p* de X , noté $Q_p(X)$, la valeur de la dérivée p -ième de K_X en 0 :

$$Q_p(X) = K_X^{(p)}(0).$$

Partie I. Fonction génératrice des moments de variables aléatoires discrètes

Dans toute cette partie :

- on note n un entier supérieur ou égal à 2 ;
- toutes les variables aléatoires considérées sont discrètes et à valeurs entières ;

- on note S une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, 1\}$ dont la loi est donnée par :

$$P(S = -1) = P(S = 1) = \frac{1}{2}.$$

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[-n, n]$.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, écrire $M_X(t)$ sous la forme d'une somme et en déduire que la fonction M_X est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .
- Justifier pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'égalité : $M_X^{(p)}(0) = E(X^p)$.
- Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $[-n, n]$ dont la fonction génératrice des moments M_Y est la même que celle de X .

On note G_X et G_Y les deux polynômes définis par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} G_X(x) = \sum_{k=0}^{2n} P(X = k - n)x^k \\ G_Y(x) = \sum_{k=0}^{2n} P(Y = k - n)x^k. \end{cases}$$

- Vérifier pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'égalité $G_X(e^t) = e^{nt}M_X(t)$.
- Justifier la relation : $\forall t \in \mathbb{R}, G_X(e^t) = G_Y(e^t)$.
- En déduire que la variable aléatoire Y suit la même loi que X .

2. Dans cette question, on note X_2 une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

On suppose que les variables aléatoire X_2 et S sont indépendantes et on pose $Y_2 = SX_2$.

- Préciser l'ensemble des valeurs possibles de la variable aléatoire Y_2 .
 - Calculer les probabilités $P(Y_2 = y)$ attachées aux diverses valeurs possibles y de Y_2 .
- Vérifier que la variable aléatoire $X_2 - (S + 1)$ suit la même loi que Y_2 .

3. Le script Python suivant permet d'effectuer des simulations de la variable aléatoire Y_2 définie dans la question précédente.

```

1 | n = 10
2 | X = rd.binomial(2, 0.5, [n, 2])
3 | B = rd.binomial(1, 0.5, [n, 2])
4 | S = 2*B-np.ones((n, 2))
5 | Z1 = np.zeros((n, 2))
6 | for k in range(n):
7 |     Z1[k, 0] = S[k, 0]*X[k, 0]
8 |     Z1[k, 1] = X[k, 0]-S[k, 0]-1
9 | Z2 = np.zeros((n, 2))
10| for k in range(n):
11|     Z2[k, 0] = S[k, 0]*X[k, 0]
12|     Z2[k, 1] = X[k, 1]-S[k, 1]-1
    
```

- Que contiennent les variables X et S après l'exécution des quatre premières instructions ?
- Expliquer pourquoi, après l'exécution des six instructions, chacun des coefficients des matrices $Z1$ et $Z2$ contient une simulation de la variable aléatoire Y_2 .
- On modifie la première ligne du script précédent en affectant à n une valeur beaucoup plus grande que 10 (par exemple 100000) et en lui adjoignant les deux instructions suivantes :

```

13 | p1 = np.sum(Z1[:, 0] == Z1[:, 1])/n
14 | p2 = np.sum(Z2[:, 0] == Z2[:, 1])/n

```

Quelles valeurs numériques approchées la loi faible des grands nombres permet-elle de fournir pour $p1$ et $p2$ après l'exécution des huit lignes du nouveau script ?

4. Dans cette question, on note X_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

On suppose que les variables aléatoires X_n et S sont indépendantes et on pose $Y_n = SX_n$.

(a) Justifier que la fonction M_{X_n} est définie sur \mathbb{R} et calculer $M_{X_n}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(b) Montrer que la fonction M_{Y_n} est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, M_{Y_n}(t) = \frac{1}{2^{n+1}} \left((1 + e^t)^n + (1 + e^{-t})^n \right).$$

(c) En utilisant l'égalité $(1 + e^{-t})^n = e^{-nt}(1 + e^t)^n$, montrer que Y_n suit la même loi que la différence $X_n - H_n$, où H_n est une variable aléatoire indépendante de X_n dont on précisera la loi.

Partie II. Propriétés générales des fonctions génératrices des cumulants et quelques exemples

5. Soit X une variable aléatoire et \mathcal{D}_X le domaine de définition de la fonction K_X .

(a) Donner la valeur de $K_X(0)$.

(b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $Y = aX + b$. Justifier pour tout réel t pour lequel at appartient à \mathcal{D}_X , l'égalité :

$$K_Y(t) = bt + K_X(at).$$

(c) On suppose ici que les variables aléatoires X et $-X$ suivent la même loi.

Que peut-on dire dans ce cas des cumulants d'ordre impair de la variable aléatoire X ?

6. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et \mathcal{D}_X et \mathcal{D}_Y les domaines de définition respectifs des fonctions K_X et K_Y .

(a) Montrer que pour tout réel t appartenant à la fois à \mathcal{D}_X et \mathcal{D}_Y , on a :

$$K_{X+Y}(t) = K_X(t) + K_Y(t).$$

(b) En déduire une relation entre les cumulants des variables aléatoires X , Y et $X + Y$.

7. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

(a) Montrer que la fonction M_U est définie sur \mathbb{R} et donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, M_U(t) = \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0, \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

(b) Calculer la dérivée de la fonction M_U en tout point $t \neq 0$.

(c) Trouver la limite du quotient $\frac{M_U(t) - 1}{t}$ lorsque t tend vers 0.

(d) Montrer que la fonction M_U est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

8. Soient α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$.

Dans cette question, on note X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

- (a) Exprimer K_X en fonction de K_U , où la variable aléatoire U a été définie dans la question 7.
- (b) Justifier que la fonction K_X est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et établir l'égalité : $Q_1(X) = E(X)$.
9. Soit un réel $\lambda > 0$ et soit T une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ .
- (a) Déterminer les fonctions M_T et K_T .
- (b) En déduire tous les cumulants de T .
10. Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.
- (a) Justifier pour tout $t \in \mathbb{R}$, la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right) dx$.
- (b) Montrer que la fonction M_Z est définie sur \mathbb{R} et donnée par : $\forall t \in \mathbb{R}, M_Z(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.
- (c) En déduire la valeur de tous les cumulants d'une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance $\mu \in \mathbb{R}$ et d'écart-type $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$.
11. Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire T_n suit la loi de Poisson de paramètre n . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $W_n = \frac{T_n - n}{\sqrt{n}}$.
- (a) Justifier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers une variable aléatoire W .
- (b) Déterminer la fonction K_{W_n} .
- (c) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_{W_n}(t) = K_W(t)$.

Partie III. Cumulant d'ordre 4.

Dans cette partie, on considère une variable aléatoire X telle que M_X est de classe \mathcal{C}^4 sur un intervalle ouvert I contenant l'origine.

On admet alors que X possède des moments jusqu'à l'ordre 4 qui coïncident avec les dérivées successives de la fonction M_X en 0. Autrement dit, pour tout $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, on a $M_X^{(k)}(0) = E(X^k)$.

De plus, on pose : $\mu_4(X) = E((X - E(X))^4)$.

12. Justifier les égalités : $Q_1(X) = E(X)$ et $Q_2(X) = V(X)$.
13. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et de même loi que X . On pose $S = X_1 - X_2$.
- (a) Montrer que la variable aléatoire S possède un moment d'ordre 4 et établir l'égalité :
- $$E(S^4) = 2\mu_4(X) + 6(V(X))^2.$$
- (b) Montrer que les fonctions M_S et K_S sont de classe \mathcal{C}^4 sur I et que pour tout $t \in I$, on a :
- $$M_S^{(4)}(t) = K_S^{(4)}(t)M_S(t) + 3K_S^{(3)}(t)M_S'(t) + 3K_S''(t)M_S''(t) + K_S'(t)M_S^{(3)}(t).$$
- (c) En déduire l'égalité : $E(S^4) = Q_4(S) + 3(V(S))^2$.
14. Justifier que le cumulant d'ordre 4 de X est donné par la relation : $Q_4(X) = \mu_4(X) - 3(V(X))^2$.