DS 5

# Devoir surveillé du Samedi 2 Décembre

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

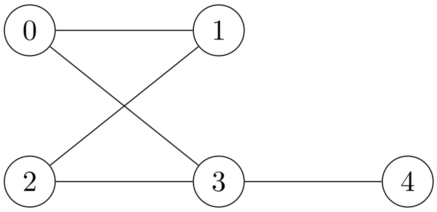
Dans tout ce devoir, on suppose avoir importé sur `Python` les bibliothèques :

- `numpy` avec le raccourci `np` ;
- `numpy.linalg` avec le raccourci `al` ;
- `numpy.random` avec le raccourci `rd` ;
- `matplotlib.pyplot` avec le raccourci `plt`.

---

## Exercice 1

On considère le graphe $G$ suivant et on note $A$ la matrice d'adjacence de $G$.




1. Déterminer la matrice $A$ en expliquant sa construction.
2. (a) Par lecture du graphe, donner (en listant leurs sommets) les chaînes de longueur 3 reliant les sommets 2 et 3. Combien y en a-t-il ?

   (b) On considère la fonction `Python` suivante :

```
def f(M,k):
    N = al.matrix_power(M,k)
    return N
```

   On suppose que l'on a saisi la matrice $A$ et on considère les instructions :

```
B = f(A,...)
n = B[...]
print(n)
```

   Compléter ces instructions pour qu'elles permettent l'affichage du nombre trouvé à la question 2.(a).

On note $D$ la matrice diagonale, appelée matrice des degrés de $G$, dont l'élément diagonal situé à la ligne $i$ et à la colonne $i$ est le degré du sommet numéro $i$ (ceci étant valable pour tout $i \in [\![1, 5]\!]$).
On définit également la matrice $L$, appelée matrice laplacienne de $G$, en posant $L = D - A$.
On note $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, $\lambda_4$, $\lambda_5$ les valeurs propres non nécessairement distinctes de $L$ et on suppose que $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \lambda_5$.

3. (a) Déterminer la matrice $D$.

   (b) Vérifier que l'on a $L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Pourquoi la matrice $L$ est-elle diagonalisable ?

4. On se propose dans cette question de montrer que les valeurs propres de $L$ sont positives ou nulles et que $\lambda_1 = 0$.

Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(a) On identifie une matrice de $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ à un réel.
Exprimer ${}^tXLX$ en fonction de $a$, $b$, $c$, $d$ et $e$ puis monter que l'on a :

$${}^tXLX = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 + (e-d)^2$$

(b) On suppose que $X$ est un vecteur propre de $L$ associé à une certaine valeur propre $\lambda$.
Déterminer $LX$ puis ${}^tXLX$ en fonction de $\lambda$, $a$, $b$, $c$, $d$ et $e$.
En déduire que les valeurs propres de $L$ sont positives ou nulles.

(c) Déterminer $LU$ et en déduire que $\lambda_1 = 0$.

5. (a) À l'aide de la question 3.(b), montrer l'équivalence :

$$LX = 0 \iff X \in \mathrm{Vect}(U).$$

(b) Conclure que $\lambda_2$, $\lambda_3$, $\lambda_4$, et $\lambda_5$ sont des réels strictement positifs.

---

## Exercice 2

On considère la fonction $f$ définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\forall x \in ]0;+\infty[, \qquad f(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}$$

On rappelle que $2 < e < 3$.

1. (a) Montrer que $f$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que, pour tout réel $x$ de $]0;+\infty[$ :

$$f'(x) = \frac{(x-1)}{2x} f(x)$$

(b) Dresser le tableau de variations de $f$ avec les limites : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

(c) Tracer l'allure de la courbe représentative de $f$.

(d) Montrer que, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, l'équation $f(x) = n$, d'inconnue $x$ dans $]0;+\infty[$, possède exactement deux solutions $u_n$ et $v_n$, avec :

$$0 < u_n < 1 < v_n.$$

2. (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ est croissante.

(b) Montrer par l'absurde que la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ tend vers $+\infty$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

3. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ converge.

Dans les questions qui suivent, on note $\ell$ la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$.

(a) Montrer par l'absurde que $\ell = 0$.

(b) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = 1$ puis un équivalent simple de $u_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

(c) Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ ? Justifier.

4. (a) Soient $n$ un entier supérieur ou égal à 2 et $\varepsilon$ un réel strictement positif.

On cherche à déterminer une valeur approchée de $u_n$ avec une marge d'erreur inférieure ou égale à $\varepsilon$.
On rappelle pour cela le principe de l'algorithme de dichotomie.

- On initialise deux variables $a$ et $b$ en leur affectant respectivement les valeurs 0 et 1.
- Tant que $b - a > \varepsilon$, on répète les opérations suivantes.
  - On considère le milieu $c$ du segment $[a, b]$. Par monotonie de $f$ sur $]0, 1]$, en distinguant les cas $f(c) \leq n$ et $f(c) > n$, on peut déterminer si $u_n$ appartient à l'intervalle $[a, c]$ ou à l'intervalle $[c, b]$.
  - Selon le cas, on met alors à jour la valeur de $a$ ou de $b$ pour se restreindre au sous-intervalle approprié.
- On renvoie finalement la valeur $\frac{a+b}{2}$, qui constitue une valeur approchée de $u_n$ à $\varepsilon$ près.

Recopier et compléter la fonction en langage Python suivante, prenant en entrée un entier `n` supérieur ou égal à 2 et un réel strictement positif `eps`, et renvoyant une valeur approchée de $u_n$ à `eps` près en appliquant l'algorithme décrit ci-dessus.

```python
def approx_u(n, eps):
    a = 0
    b = 1
    while ..... :
        c = (a+b)/2
        if np.exp(c/2)/np.sqrt(c) < n :
            .....
        else :
            .....
    return (a+b)/2
```

(b) Écrire une fonction en langage Python, nommée `sp`, prenant en entrée un entier `N` supérieur ou égal à 2 et un réel strictement positif `eps` et renvoyant une valeur approchée de la somme $\sum_{n=2}^{N} u_n$ à `eps` près.

*On pourra faire appel à la fonction* `approx_u` *définie à la question précédente.*

---

## Exercice 3

Les deux parties de cet exercice sont largement indépendantes. La deuxième partie utilise simplement les résultats de la question 6.

### Partie 1 : Espaces vectoriels et calcul matriciel.

Dans toute cette partie, $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On notera respectivement $I_3$ et $0_3$ la matrice identité et la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit $F$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, où $a$ et $b$ sont des réels quelconques.

Soit $G$ l'ensemble des matrices $M$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = M$.

1. $F$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ ?
   Si oui, déterminer une base de $F$ et préciser la dimension de $F$.

2. $G$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ ?
   Si oui, déterminer une base de $G$ et préciser la dimension de $G$.

3. Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Démontrer que $A \in F \cap G$.
   (b) En déduire un polynôme annulateur de $A$.
   (c) Déterminer les valeurs propres de $A$.

On considère dans la suite de cette partie une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ de $F$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

4. (a) Démontrer :
$$M \in G \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} a^2 + 2b^2 = a \\ b\,(b + 2a - 1) = 0 \end{array} \right.$$
   (b) Montrer alors que : $F \cap G \;=\; \{I_3, 0_3, A, I_3 - A\}$.

5. On note $B = I_3 - A$. Démontrer que $(A, B)$ est une base de $F$.

6. (a) On note $\alpha = a - b$ et $\beta = a + 2b$. Vérifier que :
$$M = \alpha \cdot A + \beta \cdot B.$$
   (b) Calculer $AB$ et $BA$.
   (c) Montrer que pour tout entier naturel $n$ :
$$M^n = \alpha^n \cdot A + \beta^n \cdot B.$$

7. (a) Montrer que $M$ est inversible si et seulement si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$.
   (b) Si $\alpha$ et $\beta$ sont deux réels non nuls, montrer que pour tout entier naturel $n$, on a :
$$M^{-n} = \alpha^{-n} \cdot A + \beta^{-n} \cdot B.$$

## Partie 2 : Étude d'une chaîne de Markov.

On considère trois points distincts du plan $A$, $B$ et $C$. Le but de cette partie est d'étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points.

A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point $A$. Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

- le mouvement du pion de l'étape $n$ à l'étape $n+1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape $n$ : il ne dépend donc pas des positions occupées aux autres étapes précédentes.
- pour passer de l'étape $n$ à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

- $A_n$ l'évènement "le pion se trouve en $A$ à l'étape $n$",
- $B_n$ l'évènement "le pion se trouve en $B$ à l'étape $n$",
- $C_n$ l'évènement "le pion se trouve en $C$ à l'étape $n$".

Pour tout $n$ entier naturel, on note également : $p_n = P(A_n)$, $q_n = P(B_n)$, $r_n = P(C_n)$ ainsi que $V_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n & r_n \end{pmatrix}$, le $n$-ème état probabiliste de cette chaîne de Markov.

**Partie 2.1 : Modélisation.**

8. (a) Représenter la situation par un graphe probabiliste et expliciter la matrice de transition $M$ associée.

   (b) On décide de représenter les sommets $A$, $B$ et $C$ sur `Python` par les numéros 1, 2 et 3 respectivement.

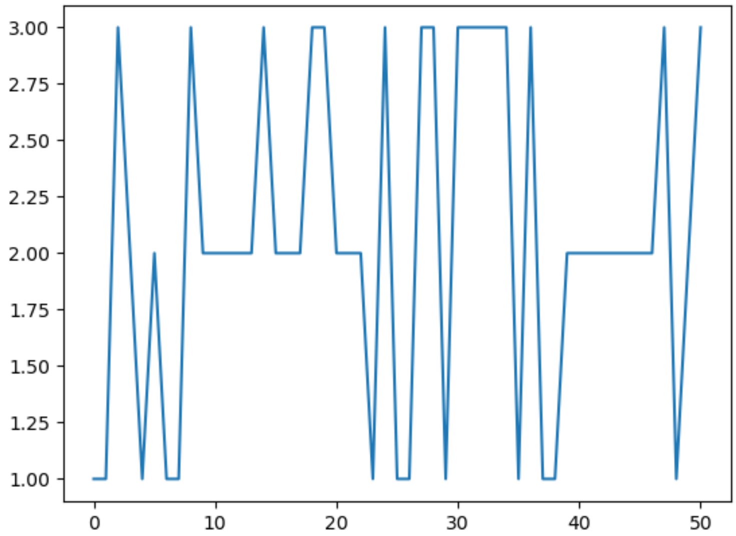
   Compléter la fonction `etape_suivante(i)` afin qu'elle prenne en entrée un paramètre $i \in [\![1, 3]\!]$ correspondant au sommet où se trouve le pion à un instant donné, qu'elle simule son déplacement et retourne sa position à l'instant suivant :

```python
def etape_suivante(i):
    j = i
    p = rd.random()
    if i == 1:
        if ..... :
            j = 2
        elif ..... :
            j = .....
    if i == ..... :
        if ..... :
            j = .....
        elif ..... :
            j = .....
    if i == ..... :
        if ..... :
            j = .....
        elif ..... :
            j = .....
    return(j)
```

   (c) On considère alors le programme suivant :

```python
X = np.zeros(51)
X[0] = 1
for k in range(50):
    X[k+1] = etape_suivante(X[k])
n = np.arange(51)
plt.plot(n, X)
plt.show()
```

   On obtient le résultat graphique suivant :




Que fait ce programme ? Comment interpréter le résultat graphique obtenu ?

9. Montrer que la chaîne de Markov admet un unique état stable que l'on déterminera.

**Partie 2.2 : Calcul du $n$-ième état probabiliste.**

10. (a) Déterminer $p_0$, $q_0$, $r_0$ ainsi que $p_1$, $q_1$, $r_1$.
    (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation : $V_{n+1} = V_n M$.
    (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $V_n = V_0 M^n$.

11. (a) En utilisant les résultats démontrés à la question 6, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$M^n = \frac{1}{3 \times 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix},$$

    où $M$ est la matrice de transition de la chaîne de Markov obtenue à la question 8.(a).
    (b) En déduire $p_n$, $q_n$ et $r_n$ en fonction de $n$ puis les limites respectives des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Interpréter ces résultats.

**Partie 2.3 : Nombre moyen de passages en $A$.**

12. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire :

$$X_n = \begin{cases} 1 \text{ si } A_n \text{ est réalisé} \\ 0 \text{ si } \overline{A_n} \text{ est réalisé} \end{cases}$$

    (a) Interpréter la variable aléatoire $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Que représente l'espérance $E(S_n)$ ?
    (b) Compléter la fonction `Python` suivante pour que, étant donné un entier naturel $n$ non nul, elle simule la variable aléatoire $S_n$ :

```
def simulS(n):
    x = 1
    c = 0
    for k in range(1,n+1):
        x = etape_suivante(x)
        if ..... :
            c = ....
    return(c)
```

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $X_n$.

(d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre moyen de passage en $A$ entre l'étape 1 et l'étape $n$.

**Partie 2.4 : Temps d'attente avant le premier passage en $B$.**

13. On définit la variable aléatoire $T_B$ de la façon suivante : $T_B$ est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en $B$.

(a) Compléter la fonction `Python` suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire $T_B$ :

```python
def simulTB():
    x = 1
    c = 0
    while ..... :
        x = etape_suivante(x)
        c = .....
    return(c)
```

(b) Calculer les probabilités $P(T_B = 1)$ et $P(T_B = 2)$.

(c) Démontrer que $P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3) = \dfrac{1}{4} P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2})$. En déduire que $P_{\overline{B_1} \cap \overline{B_2}}(B_3) = \dfrac{1}{4}$.

*Dans la suite, on note $D_n$ l'événement $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} \overline{B_k}$ et on admettra que : $P_{D_n}(B_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$.*

(d) Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ : $P(T_B = k) = \dfrac{1}{4} P(T_B \geq k)$.

(e) Justifier que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ : $P(T_B \geq k) = P(T_B = k) + P(T_B \geq k+1)$.

(f) En déduire que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ : $P(T_B = k+1) = \dfrac{3}{4} P(T_B = k)$.

(g) En déduire $P(T_B = k)$ puis donner sans calcul l'espérance et la variance de $T_B$.