DS 6

Devoir surveillé du Mercredi 10 Janvier

La calculatrice est interdite. Durée : 1h45

Dans tout ce devoir, on suppose avoir importé sur `Python` les bibliothèques :

- `numpy` avec le raccourci `np` ;
- `numpy.random` avec le raccourci `rd` ;
- `numpy.linalg` avec le raccourci `al` ;
- `matplotlib.pyplot` avec le raccourci `plt`.

Exercice 1

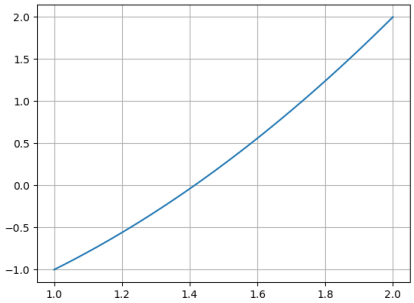
Dans cet exercice, on propose trois méthodes algorithmiques pour le calcul de la racine carrée de 2.

Méthode par balayage

On considère la fonction $f : x \in [1,2] \mapsto x^2 - 2$.

1. Écrice un script, incluant la définition de la fonction f par l'en-tête `def f(x)`, qui renvoie la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[1,2]$.

   Après exécution, ce script génère le graphe ci-contre.

   On constate que f est strictement croissante sur $[1,2]$, et s'annule en changeant de signe en $\sqrt{2}$.

2. On considère le script suivant :

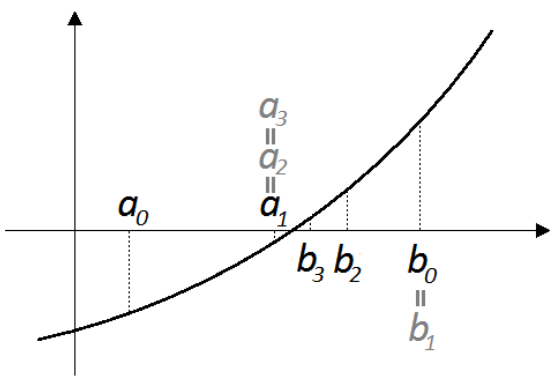
```
1 def balayage(p):
2     v = np.linspace(1,2,10**p+1)
3     i = 0
4     while f(v[i])<0 :
5         i=i+1
6     return v[i]
```

   Que renvoie la commande `balayage` ? On justifiera sa réponse en expliquant le fonctionnement du script ci-dessus.

Méthode de dichotomie

Rappelons la méthode de dichotomie.
On construit une suite d'intervalles $[a_n, b_n]$ contenant $\sqrt{2}$. Pour cela, on définit trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(m_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et

- si $f(a_n)f(m_{n+1}) \leq 0$, alors $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = m_{n+1} \end{cases}$,
- si $f(m_{n+1})f(b_n) \leq 0$, alors $\begin{cases} a_{n+1} = m_{n+1} \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$.



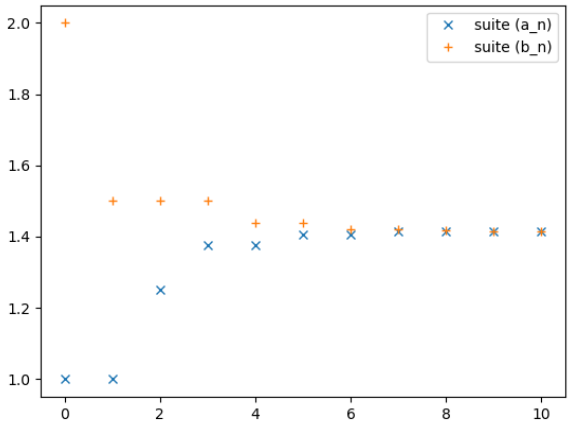
3. Compléter la fonction suivante, qui prend comme paramètre d'entrée un entier n, et qui renvoie les valeurs de a_n et b_n.

```
def suites(n):
    a = 1
    b = 2
    for ..... :
        m = .....
        if ..... :
            b = m
        else :
            a = .....
    return a, b
```

4. On souhaite étudier le comportement des suites (a_n) et (b_n), ou tout du moins de leurs premiers termes.

   Écrire pour cela un script renvoyant un graphique sur lequel sont représentés les points (n, a_n) et (n, b_n) pour $n \in [\![0, 10]\!]$.

   On obtient le graphe ci-contre.



   Les suites (a_n) et (b_n) semblent adjacentes, et converger vers la même limite ℓ. On admettra que $\ell = \sqrt{2}$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n \leq \sqrt{2} \leq b_n \quad \text{et} \quad |\sqrt{2} - a_n| \leq |b_n - a_n|.$$

5. Écrire une fonction d'en-tête `def dichotomie(eps)`, qui prend comme paramètre d'entrée un réel $\varepsilon > 0$, et qui renvoie une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à ε près.

Méthode de Newton

On considère la suite (x_n) définie par $x_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$

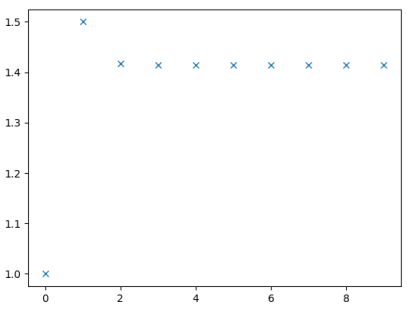
On définit la fonction $g : x \in [1, 2] \mapsto \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$.

6. Écrire une fonction d'en-tête `def suite(n)` qui prend comme paramètre d'entrée un entier n et calcule la valeur de x_n correspondante.

7. On souhaite étudier le comportement de la suite (x_n), ou tout du moins de ces premiers termes.

   Écrire pour cela un script renvoyant un graphique sur lequel se trouvent les points (n, x_n) pour $n \in [\![0, 10]\!]$.

   On obtient le graphe ci-contre.



   La suite (x_n) semble décroissante à partir du rang 1, et converger vers une limite finie ℓ appartenant à $[1, 2]$. Nous admettrons ce résultat sans démonstration dans la suite.

8. Déterminer la limite ℓ.

9. *On admet que :* $\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - \sqrt{2}| \leq 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$.

   Écrire une fonction d'en-tête `def newton(eps)`, qui prend comme paramètre d'entrée un réel $\varepsilon > 0$, et qui renvoie une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à ε près.

Exercice 2

Soient a, b deux entiers strictement positifs. Une urne contient initialement a boules rouges et b boules blanches. On effectue une succession d'épreuves, chaque épreuve étant constituée des trois étapes suivantes :

- on pioche une boule au hasard dans l'urne,
- on replace la boule tirée dans l'urne,
- on rajoute dans l'urne une boule de la même couleur que celle qui vient d'être piochée.

Après n épreuves, l'urne contient donc $a + b + n$ boules. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre de boules rouges qui ont été **ajoutées** dans l'urne (par rapport à la composition initiale) à l'issue des n premières épreuves.

On souhaite simuler l'expérience grâce à `Python`.

1. Compléter la fonction `Python` suivante, qui simule le tirage d'une boule dans une urne contenant x boules rouges et y boules blanches et qui retourne la valeur 0 si la boule est rouge et 1 si elle est blanche.

```
def tirage(x, y):
    r = rd.random()
    if ..... :
       return(0)
    else:
       return(1)
```

2. Compléter la fonction `Python` suivante, qui simule n tirages successifs dans une urne contenant initialement a boules rouges et b boules blanches (selon le protocole décrit ci-dessus) et qui retourne la valeur de X_n :

```
def experience(a, b, n):
    x = a
    y = b
    for k in range(n):
        r = tirage(x,y)
        if r == 0 :
           x = .....
        else:
           .....
    return( ..... )
```

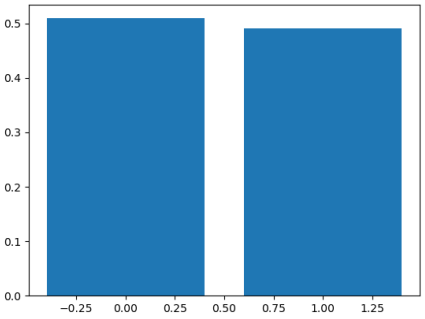
3. Compléter la fonction `Python` suivante qui fait appel `m` fois à la fonction précédente pour estimer la loi de X_n. Le paramètre de sortie sera un vecteur contenant les approximations de $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1), \ldots, P(X_n = n)$.

```
def simulation(a, b, n, m):
    loi = np.zeros(n+1)
    for k in range(m):
        r = .....
        loi[r] = .....
    return( ..... )
```

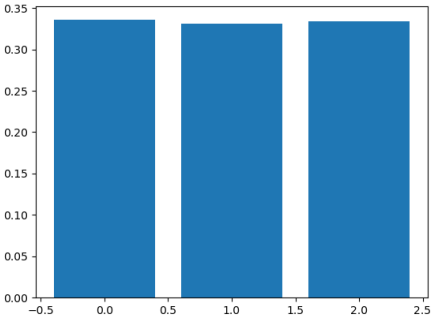
4. On s'intéresse ici au cas où $a = b = 1$. On utilise la fonction `simulation` avec des valeurs de n entre 1 et 5 et on affiche à chaque fois l'estimation de la loi de X_n sous forme d'un diagramme en bâton.

```
n = int(input('Donner n : '))
plt.bar(np.arange(0, n+1), simulation(1, 1, n, 100000))
plt.show()
```

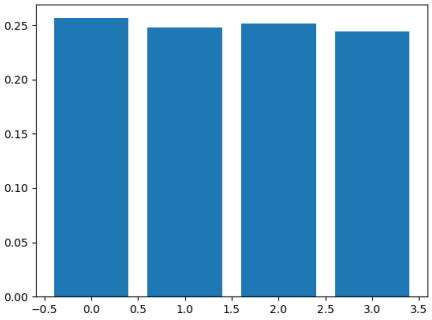
• Pour $n = 1$, on obtient :



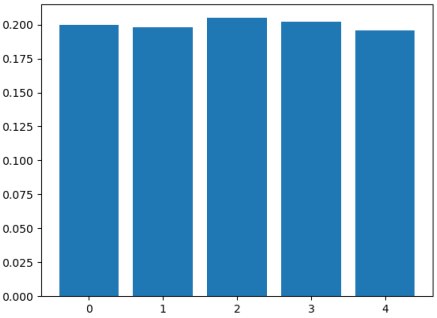
• Pour $n = 2$, on obtient :



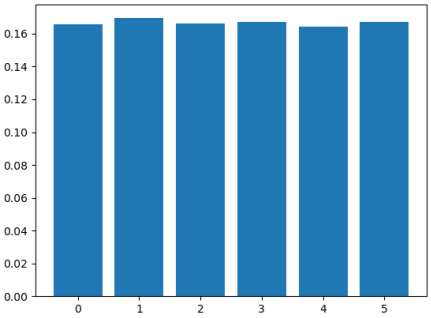
• Pour $n = 3$, on obtient :



• Pour $n = 4$, on obtient :



• Pour $n = 5$, on obtient :



À l'aide de ces résultats, conjecturer la loi de X_n. Justifier votre réponse.

Exercice 3

A l'abord d'une élection opposant deux candidats A et B, une société d'études statistiques réalise une série de sondages auprès de la population composées de n individus.

A chaque sondage, la société choisit un échantillon de taille N dans la population. Si i électeurs sur les N interrogés se sont déclarés en faveur du candidat A (et donc $N-i$ en faveur de B), on constate qu'après ce sondage, la population totale s'aligne parfaitement sur le choix de l'échantillon. Désormais, une proportion $p = \dfrac{i}{N}$ de la population totale est en faveur de A (et $1-p$ en faveur de B). On suppose que ce phénomène se répète à chaque nouveau sondage.

On suppose que, lors du premier sondage, n_0 électeurs sur les N de l'échantillon sont en faveur de A.

Nous admettrons que le rapport entre la taille de la population totale n et celle de l'échantillon N est assez grand pour qu'un sondage s'apparente à un tirage **avec** remise (une personne peut être interrogée plusieurs fois).

Pour tout entier k supérieur ou égale à 1, on note X_k la variable aléatoire égale au nombre d'électeurs se déclarant en faveur du candidat A lors du k-ième sondage suivant le sondage initial, et on pose X_0 la variable certaine égale à n_0.

Ainsi définie, la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov homogène.

1. (a) Soit $i \in [\![0, N]\!]$ et $k \in \mathbb{N}$.
   Reconnaître la loi conditionnelle de X_{k+1}, sachant que $(X_k = i)$ est réalisé. Donner alors l'expression de $P_{(X_k=i)}(X_{k+1} = j)$ pour tout $j \in [\![0, N]\!]$.

   (b) En déduire comment compléter la fonction suivante pour que les composantes de la liste `L` retournée en sortie simulent les valeurs de $X_1, X_2, \ldots, X_k$, pour des valeurs k, N et n_0 entrées par l'utilisateur.

```
def simulX(k, N, n0):
    X = n0
    L = []
    for i in range(k):
        X = .....
        L.append(X)
    return(L)
```

   (c) On exécute 4 fois la fonction `simulX` pour $k = 20$, $N = 10$ et différentes valeurs de n_0 :

   - Pour $n_0 = 3$:

```
[6, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[3, 5, 8, 7, 5, 8, 9, 8, 6, 6, 6, 6, 5, 4, 7, 8, 9, 9, 10, 10]
[4, 4, 2, 2, 3, 5, 3, 5, 2, 1, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[6, 8, 3, 2, 3, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
```

   - Pour $n_0 = 5$:

```
[8, 7, 6, 6, 8, 7, 8, 9, 8, 8, 9, 9, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10]
[5, 5, 4, 3, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[4, 3, 1, 2, 3, 6, 4, 5, 3, 1, 2, 4, 6, 5, 7, 5, 5, 3, 4, 7]
[6, 7, 9, 7, 8, 5, 6, 7, 5, 7, 8, 8, 7, 8, 8, 8, 10, 10, 10, 10]
```

   - Pour $n_0 = 8$:

```
[9, 9, 8, 7, 9, 6, 6, 7, 7, 9, 8, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10]
[3, 5, 8, 7, 5, 8, 9, 8, 6, 6, 6, 6, 5, 4, 7, 8, 9, 9, 10, 10]
[6, 8, 3, 2, 3, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[9, 9, 7, 8, 6, 6, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10]
```

   Commenter les résultats obtenus.

2. (a) Rappeler la valeur de $\binom{j}{i}$ si $i > j$ et vérifier que si $i \leq j$, alors $\binom{j}{i} = \prod_{k=0}^{i-1} \frac{j-k}{i-k}$.

   (b) Déduire de la question précédente comment compléter le script de la fonction `C` suivante de telle sorte que l'appel de `C(i,j)` renvoie $\binom{j}{i}$:

```
1 def C(i,j):
2     if i>j:
3         return 0
4     else:
5         aux = 1
6         for k in range(i):
7             aux = .....
8         return aux
```

   (c) En déduire des instructions permettant d'affecter à une variable `M` la matrice M de transition associée à la chaîne de Markov (X_k).

   (d) Justifier que la chaîne n'admet pas un unique état stable.

3. On prend de nouveau $N = 10$ et on considère les instructions suivantes, exécutées pour les valeurs successives de n_0 égales à 3, 5 et 8 :

```
1  n0 = int(input("Entrer la valeur de n0 : "))
2  S = []
3  for j in range(10000):
4      X = simulX(100, 10, n0)
5      S.append(X[-1])
6  loiemp = [S.count(i)/10000 for i in range(11)]
7  print(loiemp)
8  V0 = np.zeros(11)
9  V0[n0] = 1
10 V100 = np.dot(V0, al.matrix_power(M, 100))
11 print(V100)
```

```
Entrer la valeur de n0 : 3
[0.7017, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.2983]
[0.7, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.3]

Entrer la valeur de n0 : 5
[0.5071, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.4929]
[0.5, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.5]

Entrer la valeur de n0 : 8
[0.1971, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.8028]
[0.2, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.8]
```

   (a) Que contient la variable `S` (ligne `L5`) à l'issue des 10000 passages dans la boucle `for` ?

   (b) Que contient le vecteur `loiemp` (ligne `L6`) ?

   (c) Que contient le vecteur `V100` (ligne `L10`) ?

   (d) Quel constat les réponses renvoyées par `Python` quant à la simulation de la variable X_k proposée à la question 1.(c) permettent-elles de faire ? Que peut-on conjecturer quant à la loi limite de la suite (X_k) ?

4. On suppose maintenant que $N = 3$ et $n_0 = 1$. On note T la variable aléatoire égale au plus petit entier k tel que X_k prend la valeur 0 ou 3.

   (a) Compléter les instructions pour que le vecteur `T` contienne 10000 simulations de T.

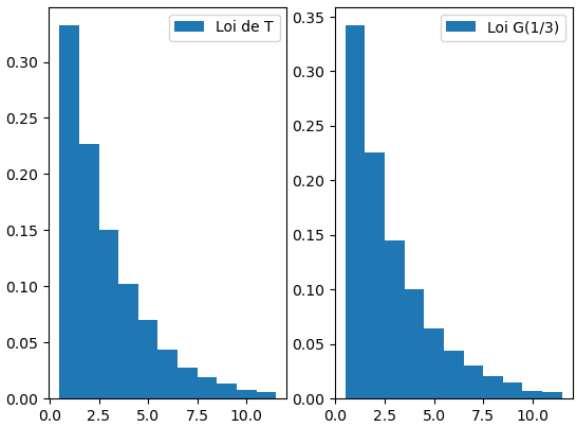
```
N = 3
n0 = 1
T = []
for i in range(10000):
    t = 0
    X = n0
    while ..... :
        t = t+1
        X = .....
    T.append(t)
```

   (b) On ajoute à ces instructions les suivantes :

```
c = np.arange(0.5, 12.5)
plt.subplot(1, 2, 1)
plt.hist(T, c, density=True, label="Loi de T")
plt.legend()

plt.subplot(1, 2, 2)
plt.hist(rd.geometric(1/3, 10000), c, density='True',
label="Loi G(1/3)")
plt.legend()
plt.show()
```

   On donne le résultat qu'elles permettent d'afficher :



   Que fait ce programme ? Que représente chacun des deux graphiques ? Que peut-on conjecturer pour la loi de T ? Justifier.

Exercice 4

On admet que le nombre X de têtards issus des oeufs pondus en mars et avril d'une année suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$.
Ces têtards sont soumis à des prédateurs nombreux et voraces, et on admet que chacun d'entre eux à une probabilité $p = 0,05$ de parvenir à son développement complet, et qu'ils se développent de façon indépendante.
On note Y le nombre de têtards qui parviennent à leur développement complet et se transforment donc en une grenouille.

1. Quelle est la loi de Y sachant $(X = k)$? Justifier.

2. Recopier et compléter la fonction `Python` suivante qui pour qu'elle simule une fois cette expérience et retourne la valeur y prise par la variable Y :

```
def simulY()
    x = .....
    y = .....
    return(y)
```

3. Écrire une fonction d'en-tête `def SimulY(N)` en langage `Python` donnant un échantillon de taille N de la loi de Y.

4. Recopier et compléter la fonction `Python` suivante pour qu'elle renvoie un vecteur $V = [v_0, \dots, v_{10}]$ tel que :

$$\forall k \in [\![0, 10]\!], \quad v_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

```
def loipoisson(lb):
    V = np.zeros(11)
    V[0] = .....
    for k in range(1,11):
        V[k] = .....
    return(V)
```

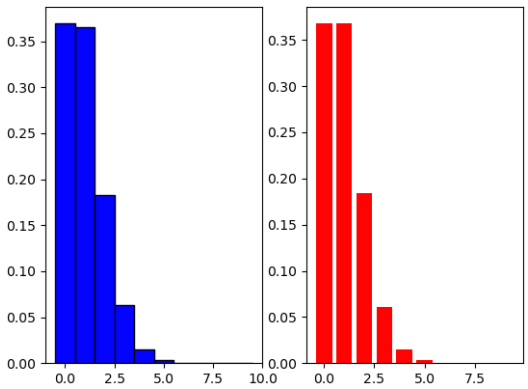
5. A la suite des instructions précédentes, on ajoute les commandes `Python` suivantes :

```
U = SimulY(100000)
c = np.arange(-0.5, 10)
plt.subplot(1, 2, 1)
plt.hist(U, c, density='True', edgecolor='k', color='blue')

n = np.arange(10)
V = loipoisson(1)
plt.subplot(1, 2, 2)
plt.bar(n, V, color='red')
plt.show()
```

Que contiennent les variables `U`, `c`, `n` et `V` ? Que fait ce programme ?

6. Après exécution, on obtient les graphiques suivants :



Quelle conjecture peut-on faire sur la variable aléatoire Y ? Justifier votre réponse.