DS 7 - Sujet A

Devoir surveillé du Samedi 20 Janvier

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

Exercice 1

Pour tout couple de réels (x, y), on définit la matrice $M(x, y)$ par :

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x+2y & 2x-y \\ -x-y & 4x-3y & -2x+y \\ -2y & 4x-4y & -x+y \end{pmatrix}.$$

On appelle E l'ensemble des matrices $M(x, y)$ où x et y décrivent $\mathbb{R}$:

$$E = \{M(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

On note $A = M(1, 0)$ et $B = M(0, 1)$.

1. (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer une base de E et donner sa dimension.
2. (a) Montrer que 1, 2 et 3 sont valeurs propres de A et déterminer les sous-espaces propres associés.
   (b) A est-elle diagonalisable ?
   (c) Déterminer une matrice inversible P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et telle que :
   $$A = PD_AP^{-1} \qquad \text{où} \qquad D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
   (d) Déterminer P^{-1} (faire figurer le détail des calculs sur la copie).
3. (a) En notant X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs colonnes formant la matrice P, calculer BX_1, BX_2 et BX_3. Que peut-on en conclure ?
   (b) En déduire l'existence d'une matrice diagonale D_B que l'on explicitera telle que :
   $$B = PD_BP^{-1}.$$
4. (a) Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe une matrice diagonale $D(x, y)$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :
   $$M(x,y) = PD(x,y)P^{-1}.$$
   (b) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (x, y) pour que $M(x, y)$ soit inversible.
5. Montrer que B^2 est un élément de E. La matrice A^2 est-elle aussi un élément de E ?

Exercice 2

Partie 1 : Étude d'une fonction

Dans tout cet exercice, f est la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f, relativement à un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Montrer que la fonction f est paire sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
3. Déterminer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.
4. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
5. Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$.
6. Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $[0, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
7. Pour tout y de l'intervalle $]0, 1]$, déterminer l'unique réel x appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$ tel que :
$$f(x) = y.$$
8. Déterminer alors la bijection réciproque f^{-1}.

Partie 2 : Calcul d'aire

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie par :

$$F(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

Pour tout réel λ strictement positif, on note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire (exprimée en unité d'aire) du domaine constitué par l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$\lambda \leq x \leq 2\lambda \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq f(x).$$

Ainsi

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_{\lambda}^{2\lambda} f(x)\, dx.$$

9. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + \sqrt{x^2+1} > 0$$
En déduire l'ensemble de définition de F.
10. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
11. Montrer que F est impaire sur son ensemble de définition.
12. Déterminer la limite de F lorsque x tend vers $+\infty$.
En déduire la limite de F quand x tend vers $-\infty$.
13. Exprimer $\mathcal{A}(\lambda)$ en fonction de λ et calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Partie 3 : Étude d'une suite

Soit (u_n) la suite de nombres réels déterminée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^1 x^n f(x)\, dx.$$

14. Calculer u_0 et u_1.
15. Effectuer une intégration par parties et calculer u_3.
On pourra remarquer que $\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} = x^2 \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
16. Déterminer le sens de variations de la suite (u_n).
17. Montrer que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas sa limite dans cette question.

18. Justifier l'encadrement suivant :

$$\forall x \in [0,1]\,,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n.$$

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

19. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

Exercice 3

Une personne envoie chaque jour un courrier électronique par l'intermédiaire de deux serveurs : le serveur A ou le serveur B.

On constate que le serveur A est choisi dans 70% des cas et donc que le serveur B est choisi dans 30% des cas. Les choix des serveurs sont supposés indépendants les uns des autres.

1. Dans cette question, on suppose que la probabilité d'une erreur de transmission avec le serveur A est de 0.1, alors que la probabilité d'erreur de transmission avec le serveur B est de 0.05.

   (a) Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur de transmission lors de l'envoi d'un courrier.

   (b) Si le courrier a subi une erreur de transmission, quelle est la probabilité pour que le serveur utilisé soit le serveur A ?

2. Un jour donné, appelé le jour 1, on note les différents serveurs utilisé par l'ordinateur par une suite de lettres. Par exemple, la suite $AABBBA\ldots$ signifie que les deux premiers jours l'ordinateur a choisi le serveur A, les jours 3. 4 et 5 il a choisi le le serveur B, et le jour 6 le serveur A. Dans cet exemple, on dit que l'on a une première série de longueur 2 et une deuxième série de longueur 3 (ce qui est également le cas de la série $BBAAAB\ldots$).

   On note L_1 la variable aléatoire représentant la longueur de la première série et L_2 la variable aléatoire représentant la longueur de la deuxième série.

   Ainsi, pour $k \geq 1$, dire que $L_1 = k$ signifie que pendant les k premiers jours, c'est le même serveur qui a été choisi et le jours suivant l'autre serveur.

   (a) Justifier soigneusement la formule :

   $$\forall k \geq 1, \quad P(L_1 = k) = (0.3)^k\,(0.7) + (0.7)^k\,(0.3)$$

   (b) Vérifier par le calcul que

   $$\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_1 = k) = 1$$

   (c) Déterminer l'espérance mathématique de L_1.

   (d) Déterminer la loi du couple aléatoire (L_1, L_2).

   (e) En déduire la loi de L_2.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A partir d'un jour donné, que l'on appellera le jour 1, on note : N_n la variable aléatoire représentant le nombre de fois où l'ordinateur choisit le serveur A pendant les n premiers jours, T_1 le numéro du jour où pour la première fois le serveur A est choisi et T_2 le numéro du jour où pour la deuxième fois le serveur A est choisi.

   (a) Déterminer la loi de N_n, son espérance mathématique et sa variance.

(b) Déterminer la loi de T_1, son espérance mathématique et sa variance.

(c) Montrer que :

$$\forall k \geq 2, \quad P\left(T_2 = k\right) = (k-1)\left(0.7\right)^2\left(0.3\right)^{k-2}.$$

4. Le temps de transmission en seconde d'un message par le serveur A est une variable aléatoire Z dont la fonction de répartition est donnée par :

$$F_Z(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Le prix en euros W de cette transmission, est calculé de la façon suivante : on multiplie la durée de transmission en seconde par 0.1 euro, auquel on ajoute une somme forfaitaire de 1 euro.

(a) Justifier que Z est à densité et déterminer une densité f_Z de Z.

(b) Déterminer le temps moyen (en seconde) de la transmission d'un message par le serveur A.

(c) Exprimer W en fonction de Z.

(d) Montrer que W est une variable aléatoire à densité. En déterminer une densité f_W.

(e) Déterminer l'espérance de la variable W.

5. On suppose que le temps de transmission d'un message en seconde par le serveur B est représenté par la variable aléatoire X dont une densité de probabilité est donnée par :

$$f_X(t) = \begin{cases} te^{-t^2/2} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

On admet/rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

(a) Vérifier que f_X est bien une densité de probabilité.

(b) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

(c) Calculer l'espérance de la variable X.