DS 7 (A)

Devoir surveillé du Samedi 18 Janvier

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

Exercice 1

Pour tout couple de réels (x, y), on définit la matrice $M(x, y)$ par :

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x+2y & 2x-y \\ -x-y & 4x-3y & -2x+y \\ -2y & 4x-4y & -x+y \end{pmatrix}.$$

On appelle E l'ensemble des matrices $M(x, y)$ où x et y décrivent $\mathbb{R}$:

$$E = \{M(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

On note $A = M(1, 0)$ et $B = M(0, 1)$.

1. (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer une base de E et donner sa dimension.
2. (a) Montrer que 1, 2 et 3 sont valeurs propres de A et déterminer les sous-espaces propres associés.
   (b) A est-elle diagonalisable ?
   (c) Déterminer une matrice inversible P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et telle que :
   $$A = PD_AP^{-1} \qquad \text{où} \qquad D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
   (d) Déterminer P^{-1} (faire figurer le détail des calculs sur la copie).
3. (a) En notant X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs colonnes formant la matrice P, calculer BX_1, BX_2 et BX_3. Que peut-on en conclure ?
   (b) En déduire l'existence d'une matrice diagonale D_B que l'on explicitera telle que :
   $$B = PD_BP^{-1}.$$
4. (a) Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe une matrice diagonale $D(x, y)$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :
   $$M(x,y) = PD(x,y)P^{-1}.$$
   (b) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (x, y) pour que $M(x, y)$ soit inversible.
5. Montrer que B^2 est un élément de E. La matrice A^2 est-elle aussi un élément de E ?

Exercice 2

Partie 1 : Étude d'une fonction

Dans tout cet exercice, f est la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f, relativement à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer que la fonction f est paire sur $\mathbb{R}$.

2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

3. Déterminer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.

4. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

5. Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$.

6. Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $[0, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

7. Pour tout y de l'intervalle $]0, 1]$, déterminer l'unique réel x appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$ tel que :
$$f(x) = y.$$

8. Déterminer alors la bijection réciproque f^{-1}.

Partie 2 : Calcul d'aire

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie par :

$$F(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

Pour tout réel λ strictement positif, on note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire (exprimée en unité d'aire) du domaine constitué par l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$\lambda \leq x \leq 2\lambda \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq f(x).$$

Ainsi
$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_{\lambda}^{2\lambda} f(x)\, dx.$$

9. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$$
En déduire l'ensemble de définition de F.

10. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

11. Montrer que F est impaire sur son ensemble de définition.

12. Déterminer la limite de F lorsque x tend vers $+\infty$.
En déduire la limite de F quand x tend vers $-\infty$.

13. Exprimer $\mathcal{A}(\lambda)$ en fonction de λ et calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Partie 3 : Étude d'une suite

Soit (u_n) la suite de nombres réels déterminée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^1 x^n f(x)\, dx.$$

14. Calculer u_0 et u_1.

15. Effectuer une intégration par parties et calculer u_3.
On pourra remarquer que $\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} = x^2 \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

16. Déterminer le sens de variations de la suite (u_n).

17. Montrer que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas sa limite dans cette question.

18. Justifier l'encadrement suivant :

$$\forall x \in [0,1], \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n.$$

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

19. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

Exercice 3

Sous diverses hypothèses, l'exercice étudie différentes situations probabilistes concernant une entreprise de construction produisant des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendemment l'une de l'autre.

Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes.

Partie 1.

On suppose que A produit 60% des objets et B produit 40% des objets. La probabilité qu'un objet construit par la chaine A soit défectueux est 0.1 alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaine B soit défectueux est 0.2.

1. On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Calculer la probabilité de l'événement “l'objet provient de la chaîne A“ .

2. On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$.

   On considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne A en une heure.

   (a) Rappeler la loi de Y ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de Y.

   (b) Soient k et n deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle $P_{(Y=n)}(X = k)$. On distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$.

   (c) En déduire, en utilisant le système complet d'événements $(Y = i)_{i \in \mathbb{N}}$, que X suit une loi de Poisson de paramètre 2.

Partie 2.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{(1+t)^3} & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

3. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire Z.

4. Déterminer la fonction de répartition F_Z de Z.

5. Justifier la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t)^3} dt$$

   La calculer en effectuant le changement de variable $u = t + 1$.

6. Prouver que Z admet une espérance et la déterminer.

7. Z admet-elle une variance ?

8. Dans cette partie, on suppose que le temps de fabrication, exprimé en minutes d'un pièce par la chaîne A (respectivement B) est une variable aléatoire Z_1 (respectivement Z_2) où Z_1 et Z_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que que Z.

   (a) On considère les événements :
   $C =$ "le temps de fabrication d'une pièce sur la chaine B est supérieur à 2 minutes".
   $D =$ "le temps de fabrication d'une pièce sur la chaîne B est inférieur à 3 minutes".
   Calculer les probabilités suivante : $P(C), P(D), P_C(D)$.

   (b) On note $T = \max(Z_1, Z_2)$ et G_T la fonction de répartition de T.

      i. Exprimer l'événement $(T \leq x)$ en fonction des événements $(Z_1 \leq x)$ et $(Z_2 \leq x)$

      ii. Montrer que :
      $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_T(x) = [F_Z(x)]^2$$

      iii. En déduire que T est une variable aléatoire à densité dont on donnera une densité.

   (c) On suppose maintenant que pour qu'une pièce soit terminée, il faut qu'elle passe par la chaîne A puis par la chaîne B. On note S la variable aléatoire représentant le temps total de fabrication d'une pièce.
   Exprimer S en fonction de Z_1 et de Z_2 et déterminer le temps moyen de fabrication d'une pièce.
