DS 7 - Sujet B

Devoir surveillé du Samedi 20 Janvier

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

Exercice 1

On considère un nombre réel a élément de $]0,1[$ et la matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix}.$$

1. On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on note E l'espace vectoriel engendré par I, M_a et M_a^2.
   (a) Quelle est la dimension de E ?
   (b) On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Calculer JK^2 puis en déduire $(M_a - I)(M_a - aI)^2$.
   (c) En déduire que M_a^3 appartient à E.
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un unique triplet de réels (u_n, v_n, w_n) tel que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad M_a^n = u_n M_a^2 + v_n M_a + w_n I.$$
   On donnera les valeurs de u_0, v_0 et w_0 et on écrira les relations liant u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1} à u_n, v_n et w_n.
   (b) En utilisant les relations précédentes, expliquer pourquoi le script `Python` qui suit ne permet pas de calculer et d'afficher les valeurs de u_n, v_n et w_n lorsque n et a sont entrés par l'utilisateur. On pourra examiner attentivement la boucle `for`.

```python
n = input('entrez une valeur pour n :')
a = input('entrez une valeur pour a :')
u = 0
v = 0
w = 1
for k in range(n):
    u = (2*a+1)*u+v
    v = -a*(a+2)*u+w
    w = a*a*u
print(w,v,u)
```

   (c) Modifier la boucle de ce script en conséquence.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = (2a+1)u_{n+2} - a(a+2)u_{n+1} + a^2 u_n$.

On admet que l'on peut en déduire u_n, pour tout entier naturel n, sous la forme :

$$u_n = \frac{(n-1)a^n - na^{n+1} + 1}{(a-1)^2}$$

5. On dit qu'une suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers la matrice A lorsque n tend vers $+\infty$ si chaque coefficient de A_n tend vers le coefficient situé à la même place dans A.

   Il en résulte (et on admet ce résultat) que :

$$\lim_{n\to\infty} M_a^n = \left(\lim_{n\to\infty} u_n\right) M_a^2 + \left(\lim_{n\to\infty} v_n\right) M_a + \left(\lim_{n\to\infty} w_n\right) I.$$

   (a) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$, puis $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} w_n$.

   (b) En déduire la limite L_a de la suite $(M_a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

   (c) Vérifier que $L_a^2 = L_a$.

Exercice 2

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0;1[$. On pose $q = 1-p$.
On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p.
On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.
Si X prend la valeur k, on pioche k boules dans V, une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Dans le cas où $n = 1$, reconnaître la loi de Y.

On revient au cas général.

2. Reconnaitre la loi de X et donner son espérance et sa variance.

3. Soit k un élément de $[\![1, n]\!]$. Reconnaitre la loi de Y, conditionnellement à l'événement $(X = k)$, et en déduire, en distinguant les cas $0 \le i \le k$ et $k < i$, la probabilité $P_{(X=k)}(Y = i)$.

4. On rappelle les commandes `Python` suivantes qui permettent de simuler des variables usuelles discrètes :

   - `rd.randint(a, b+1)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$,
   - `rd.binomial(n, p)` simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p,
   - `rd.geometric(p)` simule une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p,
   - `rd.poisson(a)` simule une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre a.

   Compléter le script `Python` suivant afin qu'il permette de simuler les variables X et Y.

```python
n = int(input('entrez la valeur de n :'))
p = int(input('entrez la valeur de p :'))
X = .....
Y = .....
```

5. (a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $[\![0, n]\!]$, puis montrer que :

$$P(Y=0) = \frac{q\,(1-q^n)}{n(1-q)}.$$

   (b) Écrire, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, la probabilité $P(Y = i)$ sous forme d'une somme de $n - i + 1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

6. (a) Soit i et k deux entiers tels que $1 \le i \le k \le n$. Montrer l'égalité : $i\dbinom{k}{i} = k\dbinom{k-1}{i-1}$.

(b) Établir ensuite que Y possède une espérance et que celle-ci est donnée par :

$$E(Y)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}p^iq^{k-i}\right).$$

(c) En déduire que $E(Y)=\dfrac{(n+1)p}{2}$.

7. (a) Établir que : $\forall n\geq 2,\quad E(Y(Y-1))=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\left(k(k-1)\sum_{i=2}^{k}\binom{k-2}{i-2}p^iq^{k-i}\right)$.

   (b) Montrer que l'on a : $\forall n\geq 2,\quad E(Y(Y-1))=\dfrac{(n^2-1)\,p^2}{3}$.

   (c) Vérifier que cette expression reste valable pour $n=1$.

   (d) Exprimer, sans chercher à la calculer, la variance de Y en fonction de $E(Y(Y-1))$ et $E(Y)$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2(1-x)^2} & \text{si } x\in[0,\frac{1}{2}[\\ \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x\in[\frac{1}{2},1[\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

Dans toute la suite, on considère une variable aléatoire X définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$ et admettant la fonction f pour densité.

2. Déterminer la fonction de répartition F de X.

3. Montrer que X a une espérance et que celle-ci vaut $\dfrac{1}{2}$.

4. (a) Déterminer $E((X-1)^2)$.

   (b) En déduire que X a une variance et que $V(X)=\dfrac{3}{4}-\ln(2)$.

5. On appelle variable indicatrice d'un événement A, la variable de Bernoulli qui vaut 1 si A est réalisé et 0 sinon.

   On considère maintenant la variable aléatoire Y, indicatrice de l'événement $(X\leq\frac{1}{2})$ et la variable aléatoire Z, indicatrice de l'événement $(X>\frac{1}{2})$.

   (a) Préciser la relation liant Y et Z puis établir sans calcul que le coefficient de corrélation linéaire de Y et Z, noté $\rho(Y,Z)$, est égal à -1.

   (b) En déduire la valeur de la covariance de Y et Z.

Exercice 4

La partie I permet d'établir des résultats utiles pour les parties II et III. Les parties II et III sont indépendantes entre elles.

On considère la fonction f définie pour tout réel x positif ou nul par : $f(x)=1-e^{-x}$.

Partie I

1. (a) Dresser le tableau de variation de f.
   (b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \leq x$, l'égalité ayant lieu seulement pour $x = 0$.

2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel x :

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^{-t} dt$$

   (b) En écrivant l'égalité précédente pour $n = 2$, puis pour $n = 3$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq x - f(x) \leq \frac{x^2}{2}$$

Partie II

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

3. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0,1]$
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - u_{n+1} \geq 0$
   (c) Conclure quant à la convergence de la suite (u_n) et donner sa limite.

4. (a) Simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1})$.
   (b) En déduire que la série de terme général $(u_n - u_{n+1})$ est convergente.
   (c) En utilisant la question 2., montrer que $u_n - u_{n+1} \sim \dfrac{u_n^2}{2}$ en $+\infty$.
   (d) Donner enfin la nature de la série de terme général u_n^2.

Partie III

5. On note ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\phi(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \phi(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

   Montrer que ϕ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

   On considère la fonction réelle g définie par $g(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x \phi(t) dt$.

6. (a) Vérifier que g est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 1 - \dfrac{x}{4} \leq g(x) \leq 1 - \dfrac{x}{4} + \dfrac{x^2}{18}$.
   (c) En déduire que g est continue en 0, dérivable en 0 puis donner $g'(0)$.

7. (a) Montrer que : $\forall x \in]1, +\infty[,\ \displaystyle\int_1^x \phi(t) dt \leq \ln(x)$.
   (b) En déduire que g a une limite finie en $+\infty$ et donner la valeur de cette limite.

8. (a) Pour tout réel x strictement positif, calculer $g'(x)$ et l'écrire sous la forme $g'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$.
   (b) Montrer alors que : $xh'(x) = (x+1)e^{-x} - 1$.
   (c) Étudier la fonction notée k définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ k(x) = (x+1)e^{-x} - 1$.
   (d) Donner le signe de k, puis les variations de h et enfin celles de g.
   (e) Dresser le tableau de variations de g et tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormé.