DS 8 (A)

Devoir surveillé du Mardi 20 Février

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

Exercice 1

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n de la variable réelle x par :

$$f_n(x) = x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

1. Justifier que $f_n(x)$ est négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$.
2. Prouver la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$.
3. On pose $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$.
   (a) A l'aide d'une intégration par parties portant sur des intégrales définies sur le segment $[0, A]$ avec $A \geq 0$, prouver que pour tout entier naturel n :
   $$I_{n+2} = (n+1)\,I_n.$$
   (b) En utilisant la loi normale centrée réduite, justifier que :
   $$I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$
   (c) Donner la valeur de I_1.
   (d) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
   $$I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^n n!} \qquad \text{et} \qquad I_{2n+1} = 2^n n!.$$
4. Soit f la fonction définie pour tout réel x par :
   $$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$
   (a) Démontrer que f est une densité de probabilité.
   (b) Soit X une variable aléatoire réelle qui admet f pour densité de probabilité.
      i. Justifier que X admet une espérance $E(X)$, et préciser sa valeur
      ii. Justifier que X admet une variance $V(X)$, et préciser sa valeur.
5. On désigne par F et G les fonctions de répartitions respectives de X et de $Y = X^2$.
   (a) Exprimer $G(x)$ en fonction de $F(x)$ en distinguant les deux cas : $x < 0$ et $x \geq 0$.
   (b) En déduire que Y est une variable à densité puis déterminer une densité de Y.
   (c) Reconnaitre la loi de Y et donner la valeur de $E(Y)$ et $V(Y)$.

Exercice 2

Partie 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 - 3x.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1. Étudier la parité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les variations de f sur $[0, +\infty[$, et calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
3. Montrer que f est convexe sur $[0, +\infty[$ et justifier que le point d'abscisse 0 est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.
4. On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

   Déterminer une équation de T et préciser la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à T.
5. Tracer, sur une même figure, l'allure de la courbe $\mathscr{C}$ (sur $\mathbb{R}$) et de la droite T.
6. Soit a un réel.
   (a) Montrer que, si $|a| < 2$, alors l'équation $x^3 - 3x + a = 0$, d'inconnue x, possède exactement trois solutions réelles.
   (b) Montrer que, si $|a| > 2$, alors l'équation $x^3 - 3x + a = 0$, d'inconnue x, possède une unique solution réelle.

Partie 2

Pour tout réel a, on considère la matrice :

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. (a) Calculer $A_a^3 - 3A_a + aI_3$.
   (b) Soient λ un réel tel que $\lambda^3 - 3\lambda + a = 0$, et soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$.

   Exprimer A_aX en fonction de λ et de X.
   (c) Déduire des deux questions précédentes que pour tout réel λ :
   λ est valeur propre de $A_a \iff \lambda^3 - 3\lambda + a = 0$.
8. **Dans cette question uniquement**, on suppose $a = 2$.
   (a) Déterminer les valeurs propres et une base de chaque sous-espace propre de A_2.
   (b) La matrice A_2 est-elle diagonalisable ?
9. **Dans cette question uniquement**, on suppose $|a| > 2$.

   La matrice A_a est-elle diagonalisable ?

   <u>Indication :</u> On pourra utiliser le résultat de la question 6.
10. **Dans cette question uniquement**, on suppose $a \in]-2, 2[$.
   (a) Montrer que A_a est diagonalisable.
   <u>Indication :</u> On pourra utiliser le résultat de la question 6.

(b) On note α, β, γ les valeurs propres de A_a. On considère les deux matrices suivantes :

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{pmatrix}$$

Justifier que P est inversible. Exprimer A_a en fonction de D et P.

Partie 3

Pour tout réel a, on considère l'équation différentielle $(\mathscr{E}_a)$ suivante, d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$(\mathscr{E}_a) : \quad y''' - 3y' + ay = 0.$$

11. Dans cette question uniquement, on suppose que $a = 0$.
    (a) Soit y une solution de l'équation $(\mathscr{E}_0)$: $y''' - 3y' = 0$. Déterminer la forme générale de la fonction y'.
    (b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $(\mathscr{E}_0)$.

Dans la suite de l'exercice, pour toute fonction y trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on note :

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix}.$$

12. Montrer que, pour tout réel a, y est solution de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_a)$ si et seulement si $Y' = A_a Y$.

13. **Dans cette question uniquement**, on suppose $a \in \,]-2, 2[$.
    (a) Montrer qu'une fonction $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_a)$ si et seulement si $Z' = DZ$, où $Z = P^{-1}Y$, où D et P sont définies à la question 10.(b).
    (b) Montrer que les solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_a)$ sont les fonctions y définies par une expression de la forme :

    $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \lambda_1 e^{\alpha x} + \lambda_2 e^{\beta x} + \lambda_2 e^{\gamma x},$$

    où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont des réels.
    (c) Vérifier en particulier que les résultats de 11.(b) et 13.(b) sont cohérents.

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul.

Une urne contient n boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard dans l'urne. Si cette boule tirée porte le numéro k, on place alors dans une seconde urne toutes les boules suivantes : une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2, et plus généralement pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, j boules numérotées j, jusqu'à k boules numérotées k. Les boules de cette deuxième urne sont aussi indiscernables au toucher. On effectue alors un tirage au hasard d'une boule dans cette seconde urne.

Et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée et on note Y la variable aléatoire égale au numéro de la deuxième boule tirée.

1. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

2. Déterminer $Y(\Omega)$.

3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
   (a) On suppose que l'événement $[X = k]$ est réalisé.
   Déterminer, en fonction de k, le nombre total de boules présentes dans la seconde urne.
   (b) Pour tout entier j de $[\![1, n]\!]$, exprimer $P_{[X=k]}(Y = j)$ en fonction de k et j.
   On distinguera les cas $j \leq k$ et $j \geq k + 1$.

4. (a) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel k non nul,
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}.$$
   (b) En déduire que, pour tout élément j de $Y(\Omega)$,
$$P(Y = j) = \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}.$$

5. Justifier que Y admet une espérance et montrer que $E(Y) = \dfrac{n+2}{3}$.

6. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

7. (a) Montrer que $E(XY) = \dfrac{(n+1)(4n+5)}{18}$.
   (b) En déduire que $\mathrm{Cov}(X, Y) = \dfrac{n^2-1}{18}$.

8. (a) Écrire une fonction en langage `Python`, nommée `seconde_urne`, prenant en entrée un entier naturel `k` non nul, et renvoyant une liste contenant 1 élément valant 1, 2 éléments valant 2, ... , j éléments valant j, ... , jusqu'à k éléments valant k.
   Par exemple, l'appel de `seconde_urne(4)` renverra `[1,2,2,3,3,3,4,4,4,4]`.
   (b) Recopier et compléter la fonction en langage `Python` suivante pour qu'elle prenne en entrée un entier naturel n non nul, et qu'elle renvoie une réalisation du couple de variables aléatoires (X, Y).

```python
import numpy.random as rd

def simul_XY(n):
    X = .....
    urne2 = seconde_urne( ..... )
    nb = len(urne2)
    i = rd.randint(0, nb)
    Y = .....
    return X,Y
```

   (c) On considère la fonction en langage `Python` suivante, prenant en entrée un entier naturel `n` non nul.

```python
def fonction(n):
    liste = [0]*n
    for i in range(10000):
        j = simul_XY(n)[1]
        liste[j-1] = liste[j-1] + 1/10000
    return liste
```

   Quelles valeurs les éléments de la liste renvoyée permettent-ils d'estimer ?

9. Dans toute cette question, on suppose $n = 20$. On simule 50 réalisations du couple de variables aléatoires (X, Y) à l'aide de la fonction `simul_XY` définie à la question 8.(b). On représente alors les valeurs obtenues sous forme d'un nuage de points, où les valeurs des réalisations de X sont représentées en abscisse et les valeurs des réalisations de Y en ordonnées. On trace également, sur la même figure, la droite de régression linéaire associée à ce nuage de points.

   (a) Déterminer par un calcul une valeur approchée des coordonnées du point moyen du nuage de points. Quel théorème de probabilités permet de justifier cette approximation ?

   (b) Parmi les figures représentées ci-dessous, en justifiant soigneusement votre réponse, indiquer celle qui correspond au nuage de points et à la droite de régression linéaire étudiés.

Figure 1

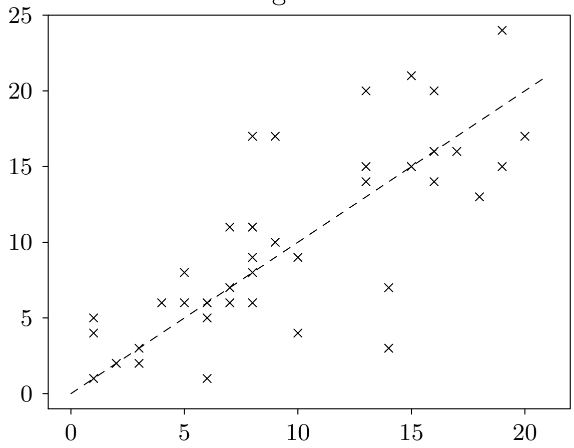

Figure 2

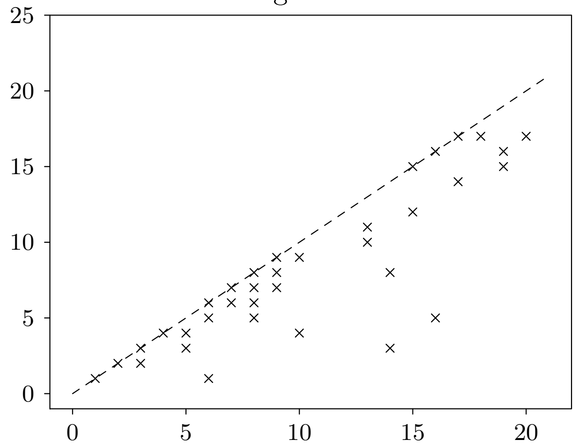

Figure 3

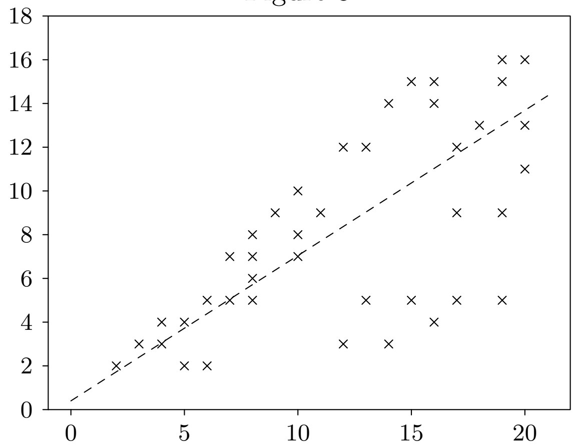

Figure 4