DS 8 (B)

# Devoir surveillé du Mardi 20 Février

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

## Exercice 1

On note $E$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à 2.
On note $e_0$, $e_1$, $e_2$ les fonctions définies, pour tout réel $x$ par $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$ et $e_2(x) = x^2$ et on rappelle que $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$ est une base de $E$.
Soit $f$ l'application qui à toute fonction polynomiale $P$ de $E$ associe la fonction $Q = f(P)$, où $Q$ est la dérivée seconde de l'application qui à tout réel $x$ associe $\left(x^2 - x\right) P(x)$.

1. (a) Montrer que $f$ est un endomorphisme de $E$.
   (b) Déterminer $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ en fonction de $e_0$, $e_1$ et $e_2$.
   (c) En déduire que la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.
   (d) Montrer sans calcul que $f$ est un automorphisme de $E$.
2. (a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $A$ .
   (b) Justifier l'existence d'une matrice $P$ inversible dont la première ligne ne contient que des 1 telle que $A = P\,D\,P^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$.
3. (a) Déterminer la matrice $P^{-1}$.
   (b) En déduire explicitement, en fonction de $n$, la matrice $A^n$.
   (c) On dit qu'une suite de matrices $(M_n)$ tend vers la matrice $M$, lorsque $n$ tend vers $+\infty$, si chaque coefficient de $M_n$ tend vers le coefficient situé à la même place dans $M$.
   On pose $B = \frac{1}{12}A$. Montrer que la suite $(B^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers une matrice $J$ vérifiant $J^2 = J$.

---

## Exercice 2

On désigne par $n$ un entier $\geq 2$.
On lance $n$ fois une pièce équilibrée, les lancers étant supposés indépendants.
On note $Z$ la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun "Pile" pendant ces $n$ lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier "Pile".

1. (a) Déterminer l'ensemble $Z(\Omega)$.
   (b) Pour tout $k \in Z(\Omega)$, calculer $P(Z = k)$. On distinguera les cas $k = 0$ et $k \geq 1$.
   (c) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k\in Z(\Omega)} P(Z = k) = 1$.
   (d) On rappelle qu'en Python, la fonction `rd.random()` permet de simuler la loi uniforme sur $]0, 1[$.
   Recopier et compléter le programme Python suivant pour qu'il simule la variable aléatoire $Z$ décrite ci-dessus, l'entier $n$ étant entré par l'utilisateur.

```python
def simulZ(n):
    k = 1
    while k <= n and ..... :
        k = .....
    if k == n+1 :
        z = .....
    else:
        z = .....
    return(z)
```

On dispose de $n+1$ urnes $U_0, U_1, \dots, U_n$ telles que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, l'urne $U_k$ contient $k$ boules blanches et $n-k$ boules noires.
On effectue des tirages d'une boule, au hasard et avec remise dans ces urnes de la façon suivante : si après les lancers de la pièce décrits dans le première question, la variable $Z$ prend la valeur $k$ (avec $k \geq 1$), alors on tire une par une et avec remise, $k$ boules dans l'urne $U_k$ et on note $X$ la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue de ces tirages. Si la variable $Z$ a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et $X$ prend la valeur 0.

2. Déterminer $X(\Omega)$

3. (a) Déterminer, en distinguant les cas $i = 0$ et $1 \leq i \leq n$, la probabilité $P_{(Z=0)}(X = i)$.
   (b) Déterminer, en distinguant les cas $i = n$ et $0 \leq i \leq n-1$, la probabilité $P_{(Z=n)}(X = i)$.
   (c) Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, déterminer, en distinguant les cas $0 \leq i \leq k$ et $k < i \leq n$, la probabilité conditionnelle $P_{(Z=k)}(X = i)$.

4. (a) Montrer que $P(X = 0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \frac{1}{2^n}$.
   (b) Montrer que $P(X = n) = \dfrac{1}{2^n}$.
   (c) Exprimer, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $P(X = i)$ sous forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à réduire.

5. Vérifier avec les expressions trouvées à la question précédente que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(X = i) = 1$.

---

## Exercice 3

On considère la fonction $f$ qui à tout réel $x$ associe : $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln\left(1 + t^2\right) dt$.

1. (a) Déterminer le signe de $f(x)$ selon le signe de $x$.
   (b) Justifier que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel $x$.
   (c) En déduire les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$ (on ne cherchera pas à calculer les limites de $f$).

2. (a) Montrer que $f$ est impaire.
   (b) Étudier la convexité de $f$ et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé.

3. (a) Déterminer les réels $a$ et $b$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2}$$

(b) En déduire, grâce à une intégration par parties, que, pour tout réel $x$, on a :

$$f(x) = x\left(\ln(1+x^2) - 2\right) + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$$

4. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

   (a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ est une intégrale convergente.

   (b) En déduire que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x\ln\left(1+x^2\right)$.

   (c) Vérifier que, pour tout réel $x$ strictement positif, on a : $\ln(1+x^2) = 2\ln(x) + \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$, puis établir l'équivalent suivant :

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x\ln(x)$$

   (d) Donner sans calcul un équivalent de $f(x)$ lorsque $x$ est au voisinage de $-\infty$.

5. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

   (a) Montrer que $f$ est de classe $C^3$ sur $\mathbb{R}$.
   On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0 pour la fonction $f$, c'est à dire :

$$f(x) = f(0) + \frac{x^1}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + o(x^3).$$

   (b) Déterminer $f(0), f'(0), f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$.

   (c) En déduire alors un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

---

## Exercice 4

**Partie 1 : propriété d'une loi de probabilité**

On désigne par $c$ un réel strictement positif et on considère la fonction $f$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^{1+c}} & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

1. Montrer que $f$ peut être considérée comme une densité.

*On considère dans la suite une variable $X$ de densité $f$ et on note $F$ sa fonction de répartition. On dit que $X$ suit la loi de Pareto de paramètre $c$.*

2. Déterminer, pour tout réel $x$, l'expression de $F(x)$ en fonction de $x$ et $c$.

3. Soit $t$ un réel strictement supérieur à 1.

   (a) Déterminer la probabilité conditionnelle $P_{(X>t)}(X \leq tx)$.
   On distinguera les cas $x \geq 1$ et $x < 1$.

   (b) En déduire que la loi de $\dfrac{X}{t}$, conditionnellement à l'événement $(X > t)$, est la loi de $X$.

**Partie 2 : réciproque de la propriété précédente**

On considère une variable aléatoire $Y$ de densité $g$ nulle sur $]-\infty, 1[$, strictement positive et continue sur $[1, +\infty[$. On pose $c = g(1)$ et on note $G$ la fonction de répartition de $Y$.

Dans toute la suite, on suppose que, pour tout réel $t$ strictement supérieur à 1, on a :

- $P(Y > t) > 0$,
- La loi de $\dfrac{Y}{t}$, conditionnellement à l'événement $(Y > t)$, est la loi de $Y$.

On veut alors montrer que $Y$ suit une loi de Pareto de paramètre $c$.

4. Justifier que $G(1) = 0$.
5. (a) Établir l'égalité :
$$\forall x \geq 1, \forall t > 1, \quad G(x) = \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}$$
   (b) Justifier que $G$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et en déduire que :
$$\forall x > 1, \forall t > 1, \quad G'(x) = \frac{tG'(tx)}{1 - G(t)}$$
   (c) Montrer enfin la relation :
$$\forall t > 1, \quad G(t) + \frac{t}{c}\, G'(t) = 1$$
6. Dans cette question, la lettre $y$ désigne une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1, +\infty|$ qui, à tout réel $t$ de $]1, +\infty[$, associe $y(t)$. On note $(E_1)$ l'équation différentielle
$$y + \frac{t}{c}\, y' = 0$$
et $(E_2)$ l'équation différentielle
$$y + \frac{t}{c}\, y' = 1.$$
*Il convient de noter que ces équations différentielles ne sont pas à coefficients constants.*
   (a) Soit $z$ la fonction définie par $z(t) = t^c y(t)$.
   Montrer que $y$ est solution de l'équation différentielle $(E_1)$ si et seulement si $z$ est constante sur $]1, +\infty[$.
   (b) En notant $K$ la constant évoquée à la question précédente, donner toutes les solutions de $(E_1)$.
   (c) Trouver une fonction $u$, constante sur $]1, +\infty[$, et solution de l'équation différentielle $(E_2)$.
   (d) Montrer l'équivalence : $h$ solution de $(E_2)$ $\Leftrightarrow$ $h - u$ solution de $(E_1)$.
   (e) En déduire que les solutions de l'équation différentielle $(E_2)$ sont les fonctions $h$ définies par :
$$\forall t > 1, \quad h(t) = 1 + \frac{K}{t^c}$$
7. (a) Montrer finalement que l'on a :
$$\forall t > 1, \quad G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}$$
   (b) Vérifier que cette relation s'étend à $[1, +\infty[$, puis conclure quant à la loi de $Y$.

**Partie 3 : simulation d'une variable suivant la loi de Pareto de paramètre $c$**

8. On pose $Z = \ln(X)$ et on admet que $Z$ est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que $X$. On note $H$ sa fonction de répartition.
   (a) Pour tout réel $x$, exprimer $H(x)$ à l'aide de la fonction $F$.
   (b) En déduire que $Z$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
   (c) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `simulX(c)` et permettant de simuler $X$.