DS 9 (A)

Devoir surveillé du Jeudi 27 Février

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

Exercice 1

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On considère également l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad g(x, y, z) = (x + y - z,\ 2y,\ -x + y + z).$$

Enfin, on pose :

$$u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0) \quad \text{et} \quad v = f(e_1) + e_1.$$

1. (a) Calculer v.
   (b) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (u, v, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.
   Expliciter la matrice P et calculer P^{-1}.

2. (a) Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{C}$.
   (b) Expliciter, sans justification, le lien entre les matrices A, A', P et P^{-1}.
   (c) Déterminer les valeurs propres de A', ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre.
   (d) La matrice A est-elle inversible ? Diagonalisable ?

3. (a) Déterminer la matrice B de g dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) Montrer : $B^2 = 2B$.
   (c) En déduire les valeurs propres de B, ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre.
   (d) La matrice B est-elle inversible ? Diagonalisable ?

On pose : $\mathcal{E} = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM = MA\}$.

4. (a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel.
   (b) Soit M une matrice appartenant à $\mathcal{E}$. Montrer que M n'est pas inversible.
   (On pourra raisonner par l'absurde).

5. On cherche à montrer que $\mathcal{E}$ n'est pas réduit à l'ensemble $\{0\}$.
   (a) Justifier que, pour tout réel λ, les matrices $A - \lambda I_3$ et $({}^tA) - \lambda I_3$ ont même rang, la matrice I_3 désignant la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) En déduire que les matrices B et ${}^tA$ admettent une valeur propre en commun, notée α.
   (c) Soient X un vecteur propre de B associé à la valeur propre α, et Y un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre α. On note : $N = X\,{}^tY$.
   Montrer que la matrice N est non nulle et que N appartient à $\mathcal{E}$.
   (d) En déduire : $\dim(\mathcal{E}) \geq 2$.

Exercice 2

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Partie A : Des résultats préliminaires

Soient U et V deux variables aléatoires à densité indépendantes, de densités respectives f_U et f_V, et de fonctions de répartition respectives F_U et F_V.

On suppose que les fonctions f_U et f_V sont nulles sur $]-\infty; 0[$ et continues sur $[0; +\infty[$.

1. (a) Justifier : $\forall t \in [0; +\infty[,\ 0 \leq F_U(t) f_V(t) \leq f_V(t)$.

   (b) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t) dt$ converge.

On admet le résultat suivant :

$$\int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t) dt = P(U \leq V).$$

2. En déduire : $P(U > V) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_U(t)) f_V(t) dt$.

3. **Exemple :** Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose dans cette question que U suit la loi exponentielle de paramètre λ et que V suit la loi exponentielle de paramètre μ.

   (a) Rappeler, pour tout t de $\mathbb{R}_+$, une expression de $F_U(t)$ et de $f_V(t)$.

   (b) En déduire : $P(U > V) = \dfrac{\mu}{\lambda + \mu}$.

Partie B : Une application

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On considère $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ.

On définit ensuite la variable N égale au plus petit entier k de $\mathbb{N}^*$ tel que $T_k \leq T_0$ si un tel entier existe et égale à 0 sinon.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la variable aléatoire M_n par : $M_n = \min(T_1, \ldots, T_n)$.

   (a) Calculer, pour tout t de $\mathbb{R}_+$, $P(M_n > t)$.

   (b) En déduire la fonction de répartition de M_n sur $\mathbb{R}$.
   Reconnaître la loi de M_n et préciser son(ses) paramètre(s).

5. (a) Montrer : $P(N = 1) = P(T_1 \leq T_0) = \dfrac{1}{2}$.

   (b) Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ [N > n] = [M_n > T_0]$.
   En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une expression de $P(N > n)$ en fonction de n.

   (c) Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\},\ P(N = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

   (d) En déduire la valeur de $P(N = 0)$.

6. La variable aléatoire N admet-elle une espérance?

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]0,1[$ par :

$$f : x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}.$$

Partie A : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0,1[,\ f'(x) = \frac{1}{x\,(1-x)\,\big(\ln(x)\big)^2}\,\big(-x\,\ln(x) - (1-x)\,\ln(1-x)\big).$$

2. (a) Justifier : $\forall t \in]0,1[,\ t\,\ln(t) < 0$.
   (b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0,1[$.

3. (a) Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
   On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser $f(0)$.
   (b) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

4. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, en faisant figurer la tangente en 0 et les branches infinies éventuelles.

Partie B : Étude d'une suite

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, (E_n) l'équation : $x^n + x - 1 = 0$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x \mapsto x^n + x - 1$.
   En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ que l'on note u_n.

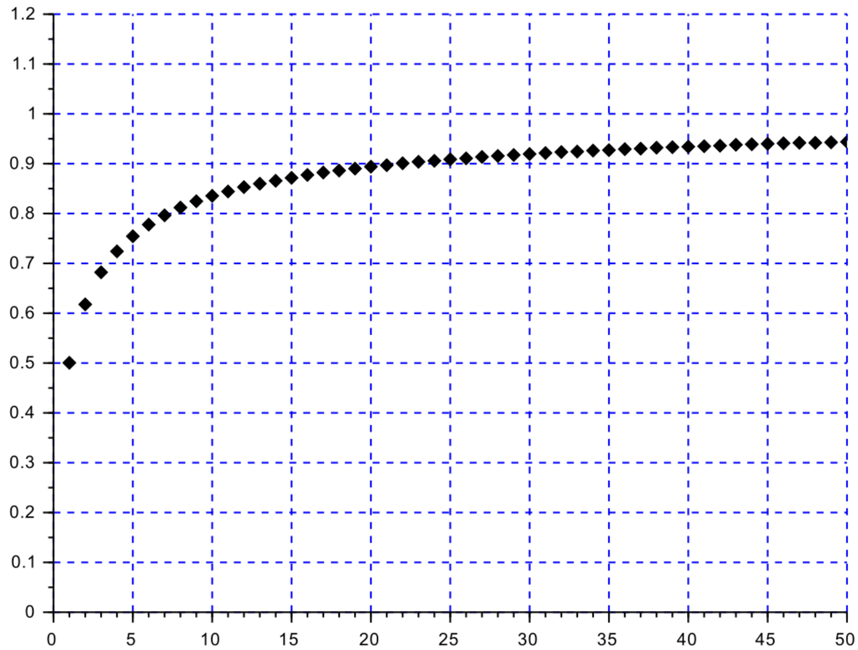
7. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n appartient à l'intervalle $]0,1[$.

8. Déterminer u_1 et u_2.

9. (a) Recopier et compléter la fonction `Python` suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
def valeur_approchee(n)
    a = 0
    b = 1
    while ..... :
        c = (a+b) / 2
        if c^n+c-1>0 :
            .....
        else
            .....
    return( ..... )
```

(b) On représente alors les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et on obtient le graphe suivant.



Quelles conjectures peut-on faire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ concernant sa monotonie, sa convergence et son éventuelle limite ?

10. (a) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $f(u_n) = n$.
(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
(c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.