DS 9 (A)

Devoir surveillé du Vendredi 23 Février

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

Exercice 1

Partie I - Un premier système différentiel.

On considère le système différentiel

$$(S)\quad \begin{cases} x' = 3x + y + z \\ y' = x + 3y + z \\ z' = x + y + 3z \end{cases}$$

où x, y et z désignent des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. (a) Déterminer la matrice A associée au système différentiel (S).

   (b) Donner les instructions en langage `Python` pour :

   - importer la librairie `numpy` avec le raccourci `np` ;
   - importer la librairie `numpy.linalg` avec le raccourci `al` ;
   - définir une variable `A` contenant la matrice A.

   (c) Après les instructions de la question précédente que l'on suppose correctement entrées dans la console, on entre les commandes suivantes et on constate les résultats retournés par `Python` :

   ```
   >>> al.matrix_rank(A-2*np.eye(3,3))
   1
   >>> al.matrix_rank(A-5*np.eye(3,3))
   2
   ```

   Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de A et les sous-espaces propres de A ?

   (d) Déterminer, par le calcul, les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

   (e) Justifier que A est diagonalisable et donner une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ (on ne demande pas de préciser la matrice P^{-1}).

2. Résoudre le système différentiel (S).

3. (a) Quel résultat permet d'affirmer l'existence d'une unique solution $X_0 : t \mapsto \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \\ z_0(t) \end{pmatrix}$ du système différentiel (S) telle que $X_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

   (b) Déterminer la solution X_0 de la question précédente.

Partie II - Un second système différentiel.

Dans cette partie, on considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. (a) Déterminer les valeurs propres de B.

   (b) La matrice B est-elle diagonalisable ?

5. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que B est la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$. On considère aussi les vecteurs $v_1 = (2, -1)$ et $v_2 = (-1, 0)$.

(a) Justifier que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
(b) Quelle est la matrice T de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}'$?
(c) Donner une matrice Q inversible telle que $B = QTQ^{-1}$.

6. On considère le système différentiel

$$(\Sigma)\ \begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases},$$

où x et y sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

(a) On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Y = Q^{-1}X$. Montrer que : $X' = BX \Leftrightarrow Y' = TY$.
(b) Vérifier que $t \mapsto te^t$ est une solution particulière de l'équation différentielle $y' - y = e^t$.
(c) Déterminer les solutions du système différentiel $Y' = TY$.
(d) En déduire l'ensemble des solutions du système différentiel (Σ).

Exercice 2

Les deux parties sont indépendantes. Soit $p \in]0;1[$. On note $q = 1 - p$.

Partie I : Différence de deux variables aléatoires.

Soit n un entier naturel non nul. On considère n joueurs qui visent une cible. Chaque joueur effectue deux tirs. A chaque tir, chaque joueur a la probabilité p d'atteindre la cible. Les tirs sont indépendants les uns des autres.
On définit la variable aléatoire X égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au premier tir et la variable aléatoire Z égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au moins une fois à l'issue des deux tirs.

1. Déterminer la loi de X. Rappeler son espérance et sa variance.
2. Montrer que Z suit une loi binomiale. Donner son espérance et sa variance.
3. On note $Y = Z - X$. Que représente la variable aléatoire Y ? Déterminer la loi de Y.
4. (a) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
   (b) Calculer la covariance du couple (X, Y).
5. On suppose dans cette question avoir importé sur `Python` les bibliothèques `numpy` (avec le raccourci `np`) et `numpy.random` (avec le raccourci `rd`).
   (a) Proposer un programme `Python` d'en-tête `simulX(n, p)` qui retourne une simulation de la variable aléatoire X en utilisant uniquement la commande `rd.random()`.
   (b) On admet avoir correctement programmé deux fonctions `simulX(n, p)` et `simulY(n, p)` qui retournent respectivement une simulation de la variable aléatoire X et une simulation de la variable aléatoire Y.
   On considère le programme suivant :

```
def mystere(n, p):
    x = np.zeros(10000)
    y = np.zeros(10000)
    xy = np.zeros(10000)
    for k in range(10000)
        x[k] = simulX(n, p)
        y[k] = simulY(n, p)
        xy[k] = x[k]*y[k]
    return(np.mean(xy) - np.mean(x)*np.mean(y))
```

Que fait cette fonction ? Quel résultat retourne-t-elle ?

Partie II : Variable aléatoire à densité conditionnée par une variable aléatoire discrète.
Dans cette partie, on note U une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

6. Rappeler la loi de U, son espérance et sa variance.

7. On considère une variable aléatoire T telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0; +\infty[\,, \quad P_{(U=n)}\,(T > t) = e^{-nt}.$$

   (a) Montrer : $\forall t \in [0, +\infty[\,, \quad P\,(T > t) = \dfrac{p\ e^{-t}}{1 - q\ e^{-t}}$.

   (b) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire T.

   (c) En déduire que T est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.

8. On note $Z = UT$.

   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall z \in [0, +\infty[\,, \quad P_{(U=n)}\,(Z > z) = e^{-z}$.

   (b) En déduire que la variable aléatoire Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall z \in [0, +\infty[\,, \quad P\,((U = n) \cap (Z > z)) = P\,(U = n)\,P\,(Z > z)\,.$

Exercice 3

On considère la fonction $f :]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0; +\infty[$, par :

$$f(x) = e^x - e\ln(x)$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < e < 2,8 \qquad 7,3 < e^2 < 7,4 \qquad 0,6 < \ln(2) < 0,7$$

Partie I : Étude de la fonction f.

1. (a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'x)$ et $f''(x)$.

   (b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.

2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.

3. Tracer la courbe représentative de f.

4. (a) Étudier les variations de la fonction $u :]0; +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x) - x$.

   (b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer que : $1 < \alpha < 2$.

Partie II : Étude d'une suite, étude d'une série.
On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{ et } \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

5. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 2$.

6. (a) Étudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : [2; +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) - x$.

   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

7. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.

8. Écrire un programme en `Python` qui, étant donné un réel A, renvoie $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geq A$.

9. (a) Démontrer : $\forall x \in [2;+\infty[, \quad 2\ln(x) \leq x \leq \dfrac{e^x}{3}$

   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geq \dfrac{6-e}{2} u_n$.

   (c) Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$.

Partie III : Étude d'intégrales généralisées.

10. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge-t-elle ?

11. Montrer que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{f(x)}dx$ converge. On pourra utiliser le résultat de la question 9.(a).
