Écrit 4 : Algèbre

Les deux problèmes sont indépendants.

Problème 1 : Quelques utilisations de projecteurs

Notations et objectifs

Dans tout le texte E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. On note I_E l'endomorphisme identité de E, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices réelles carrées de taille n.

Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de E supplémentaires, c'est-à-dire $E = E_1 \oplus E_2$, on appelle projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 l'endomorphisme p de E qui, à un vecteur x de E se décomposant comme $x = x_1 + x_2$, avec $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, associe le vecteur x_1.

On rappelle que si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice exponentielle de A est la matrice :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

De même si u est un endomorphisme de E, l'exponentielle de u est l'endomorphisme :

$$\exp(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!}.$$

Dans les parties II. et III., on propose une méthode de calcul d'exponentielle de matrice à l'aide de projecteurs spectraux dans les cas diagonalisable et non diagonalisable.

Les trois parties sont indépendantes.

I. Questions préliminaires

1. Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Calculer $\exp(A), \exp(B), \exp(A)\exp(B)$ et $\exp(A+B)$ (pour $\exp(A+B)$, on donnera la réponse en utilisant les fonctions ch et sh).
2. Rappeler sans démonstration, une condition suffisante pour que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifient l'égalité
   $$\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B).$$

II. Un calcul d'exponentielle de matrice à l'aide des projecteurs spectraux, cas diagonalisable

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable dont les valeurs propres sont

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_r,$$

où r désigne un entier vérifiant $1 \leq r \leq n$.

3. *Polynôme interpolateur de Lagrange* : on note $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $r-1$. On considère l'application linéaire φ de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^r$ définie par :

$$P \mapsto (P(\lambda_1), P(\lambda_2), \dots, P(\lambda_r)).$$

   Déterminer le noyau de φ puis en déduire qu'il existe un unique polynôme L de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, $L(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$.

4. Pour $i \in \{1, \dots, r\}$, on définit le polynôme l_i de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ par :

$$l_i(X) = \prod_{k=1, k\neq i}^{r} \frac{X - \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k}.$$

   (a) Calculer $l_i(\lambda_j)$ selon les valeurs de i et j dans $\{1, \dots, r\}$.

   (b) En déduire une expression du polynôme L comme une combinaison linéaire des polynômes l_i avec $i \in \{1, \dots, r\}$.

5. *Une propriété de l'exponentielle* : soit Q une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (a) Justifier que l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $M \mapsto QMQ^{-1}$ est une application continue.

   (b) En déduire que, si $M = QDQ^{-1}$, alors : $\exp(M) = Q\exp(D)Q^{-1}$.

6. Déduire des questions 3. et 5. que $\exp(A) = L(A)$.

7. On suppose que E est muni d'une base $\mathcal{B}$ et on désigne par u l'endomorphisme de E dont la matrice par rapport à $\mathcal{B}$ est A. Soit λ une valeur propre de u, et x un vecteur propre associé. Démontrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a : $P(u)(x) = P(\lambda)x$.

8. Soit $i \in \{1, \dots, r\}$, on note $E_i = Ker(u - \lambda_i I_E)$ le sous-espace propre de u associé à λ_i.

   (a) Démontrer que l'endomorphisme de E $p_i = l_i(u)$ est le projecteur sur E_i parallèlement à $\displaystyle\bigoplus_{k=1, k\neq i}^{r} E_k$. On dit que les p_i sont les projecteurs spectraux de u.

   (b) En déduire une expression de $\exp(A)$ comme une combinaison linéaire de matrices de projecteurs.

III. Un calcul d'exponentielle de matrice à l'aide des projecteurs spectraux, cas non diagonalisable

Soit u un endomorphisme de E dont le polynôme minimal est

$$(X-1)^2(X-2).$$

9. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? Justifier la réponse.

10. Ecrire, sans justifier, un exemple de matrice triangulaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont l'endomorphisme canoniquement associé a pour polynôme minimal le polynôme $(X-1)^2(X-2)$.

11. Démontrer, sans aucun calcul, que $E = Ker(u - I_E)^2 \oplus Ker(u - 2I_E)$.

12. On considère les endomorphismes de E $p = (u - I_E)^2$ et $q = u \circ (2I_E - u)$. Calculer $p + q$.

13. Démontrer que l'endomorphisme p est le projecteur sur $Ker(u - 2I_E)$ parallèlement à $Ker(u - I_E)^2$. Que dire de l'endomorphisme q ?

14. Soit x un élément de E.

(a) Préciser $(u-2I_E)(p(x))$.

(b) Déterminer un nombre réel α tel que pour tout entier naturel k, $u^k \circ p = \alpha^k p$.

(c) En déduire que $\exp(u) \circ p = \beta p$ où β est un réel à déterminer.

15. Que vaut pour tout entier $k \geq 2$, $(u-I_E)^k \circ q$? Démontrer que $\exp(u) \circ q = \gamma u \circ q$ où γ est un réel à déterminer (on pourra écrire en justifiant que $\exp(u) = \exp(I_E) \circ \exp(u-I_E)$).

16. Ecrire enfin l'endomorphisme $\exp(u)$ comme un polynôme en u.

Problème 2 : Calcul de distances d'une matrice à des parties de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Notations Dans ce sujet, n désigne un entier naturel non nul et on note :

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices carrées réelles d'ordre n.

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à n lignes et à une colonne.

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^tA$ est sa transposée, $rg(A)$ est son rang et $tr(A)$ est sa trace.

I_n : la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$: le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$: l'ensemble des matrices positives de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ c'est-à-dire des matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geq 0$.

$GL_n(\mathbb{R})$: le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$: le groupe des matrices réelles orthogonales c'est-à-dire des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tMM = I_n$.

Pour p entier naturel, Δ_p est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang supérieur ou égal à p.

Objectifs Le but de ce sujet est de calculer la distance (par la norme de Shur définie à la question II.3.) d'une matrice à :

– dans la partie II., $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ par le théorème de projection orthogonale,

– dans la partie III., $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ par le théorème de décomposition polaire,

– dans la partie IV., Δ_p par des notions de densité.

Remarque. Dans ce texte, le mot "positif" signifie "supérieur ou égal à 0".

I. Exercice préliminaire

1. Soit la matrice $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $H = {}^t\Gamma\Gamma$. Diagonaliser la matrice H et déterminer une matrice P de $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D à termes tous positifs telles que $D^2 = P^{-1}HP$.

2. On pose $S = PDP^{-1} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$, montrer que la relation $\Gamma = US$ définit une matrice $U \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et calculer cette matrice.

II. Calcul de la distance de A à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

3. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $(A \mid B) = tr({}^tAB)$. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La norme associée à ce produit scalaire est notée $\| A \| = \sqrt{(A \mid A)}$.

Dans tout ce sujet, si Π est une partie non vide de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la distance d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la partie Π est le réel :

$$d(A, \Pi) = \inf_{M \in \Pi} \| A - M \| .$$

4. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et que cette somme directe est orthogonale.
5. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \| \frac{1}{2}(A - {}^tA) \|$ et déterminer de même $d(A, \mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$.
6. Calculer $d(\Gamma, \mathcal{A}_3(\mathbb{R}))$ où Γ est la matrice exemple de la partie I.

III. Calcul de la distance de A à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

A. Théorème de décomposition polaire

7. Montrer qu'une matrice S de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes les valeurs propres de S sont positives ou nulles.
8. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que la matrice ${}^tAA \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
9. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on suppose qu'il existe une matrice diagonale $D = diag(d_1, \ldots, d_n)$ à termes positifs telle que ${}^tAA = D^2$. On note $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui forment les colonnes de la matrice A.
   (a) Pour tout couple (i, j) d'entiers naturels compris entre 1 et n, évaluer ${}^tA_iA_j$. En particulier, si i est un entier pour lequel $d_i = 0$, que vaut A_i ?
   (b) Montrer que l'on peut trouver une base orthonormale $(E_1, \ldots, E_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (par rapport au produit scalaire canonique $(X \mid Y) = {}^tXY$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) telle que, pour tout i entier naturel compris entre 1 et n, $A_i = d_iE_i$.
   (c) En déduire qu'il existe une matrice E de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = ED$.
10. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tAA = {}^tBB$.
    (a) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D à termes positifs et une matrice orthogonale P telles que : $P^{-1t}AAP = P^{-1t}BBP = D^2$.
    (b) Montrer qu'il existe U de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = UB$.
11. Déduire des questions précédentes le théorème de décomposition polaire : pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice U de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = US$.

B. Calcul de $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$

12. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour toute matrice Ω de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$,
$$\| \Omega M \| = \| M\Omega \| = \| M \| .$$
13. Dans la suite de cette partie, soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = US$; il existe une matrice diagonale D à termes positifs et une matrice P de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = PDP^{-1}$.
    (a) Montrer que, pour toute matrice Ω de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\| A - \Omega \| = \| S - U^{-1}\Omega \|$ et en déduire que $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.
    (b) Montrer que $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.
14. On note $D = diag(d_1, \ldots, d_n)$, avec $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, d_i \geq 0$.

(a) Montrer que pour toute matrice Ω de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$,

$$\| D - \Omega \|^2 = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 - 2tr(D\Omega) + n.$$

(b) Montrer que pour toute matrice Ω de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $tr(D\Omega) \leq \sum_{i=1}^{n} d_i$.

(c) Conclure que $d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \| D - I_n \|$.

15. Montrer que $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \| A - U \|$.
16. Calculer $d(\Gamma, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$ où Γ est la matrice exemple de la partie I.

IV. Calcul de la distance de A à Δ_p

17. Un résultat de densité.
    (a) Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout λ vérifiant $0 < \lambda < \alpha$, la matrice $M - \lambda I_n$ est inversible.
    (b) En déduire que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
18. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer, pour tout entier naturel $p \leq n$, $d(A, \Delta_p)$.