Université de Reims Champagne Ardenne
UFR Sciences Exactes et Naturelles

Année universitaire 2012-2013
SEN 0505 - Licence 3

Devoir Surveillé 1 - Mercredi 10 Octobre

Exercice 1 *Démonstration du théorème de Thalès par les aires*
On considère un triangle ABC, N un point de $[AC]$ et M un point de $[AB]$ tels que (MN) soit parallèle à (BC). Le but de cet exercice est de démontrer l'égalité $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

1. Construire la figure à la règle et au compas. Expliquer la construction.
2. Soit I le point d'intersection de (AB) et de la perpendiculaire à (AB) passant par C. Après avoir calculé les aires $\mathcal{A}_{AMC}$ et $\mathcal{A}_{ABC}$ des triangles AMC et ABC, montrer que $\frac{\mathcal{A}_{AMC}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{AM}{AB}$.
3. Soit J le point d'intersection de (AC) et de la perpendiculaire à (AC) passant par B. De la même façon que précédement, montrer que $\frac{\mathcal{A}_{ANB}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{AN}{AC}$.
4. (a) Expliquer pourquoi les triangles BMC et BNC ont des aires égales.
   (b) Expliquer pourquoi les aires des triangles AMC et ANB sont elles aussi égales.
   (c) Que dire alors des quotients $\frac{\mathcal{A}_{AMC}}{\mathcal{A}_{ABC}}$ et $\frac{\mathcal{A}_{ANB}}{\mathcal{A}_{ABC}}$?
   (d) Conclure.

Exercice 2 On considère ABC un triangle isocèle en A et E le symétrique de B par rapport à A.

1. Construire la figure à la règle et au compas. Expliquer la construction.
2. Quelle est la nature du triangle BCE ? Justifier.
3. Montrer que $\widehat{EAC} = 2\widehat{ABC}$.
4. Soient $\mathcal{C}$ le cercle de centre C et tangent à la droite (EB) et $\mathcal{C}'$ le cercle de centre E et tangent à la droite (BC). Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ se coupent en F et G.
   (a) Construire F et G.
   (b) Quelle est la nature des triangles EFG et CGF ? Justifier.
   (c) Montrer que les droites (FG) et (BC) sont parallèles.

Exercice 3 On considère deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sécantes en O.

1. (a) Rappeler la définition des bissectrices d'un couple de droites sécantes.
   (b) Construire à la règle et au compas les bissectrices, notées Δ_1 et Δ_2, de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Expliquer la construction.
2. Le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R coupe $\mathcal{D}$ en deux points A et B et $\mathcal{D}'$ en C et D.
   (a) Que dire du quadrilatère $ACBD$? Justifier.
   (b) On note E, F, G, H les milieux des $[AC], [CB], [BD]$ et $[DA]$. Démontrer que le quadrilatère $EFGH$ est un losange.

Devoir Maison - A rendre le Mardi 13 Novembre

Exercice 1 On considère un parallélogramme $ABCD$ de centre S.

1. Construire le point F, symétrique de D par rapport à B, et le point E, symétrique de A par rapport à C. On expliquera (sans justifier) comment on obtient ces points.
2. En considérant le triangle SEF, montrer que les droites (CB) et (EF) sont parallèles.
3. La droite (CB) coupe la droite (AF) en K. Justifier que K est le milieu de $[AF]$.
4. Quel point particulier représente B dans le triangle AFC ? Justifier votre réponse.
5. Prouver que la droite (AB) coupe le segment $[CF]$ en son milieu L.

Exercice 2 On considère un cercle $\mathcal{C}$, de centre O, et $[AB]$ un diamètre de ce cercle.

1. Construire la médiatrice du segment $[OB]$. Expliquer et justifier.
   On note D et E les deux points d'intersection de la médiatrice avec le cercle $\mathcal{C}$.
2. Etablir que (OB) est la médiatrice de $[DE]$.
3. En déduire que le triangle ADE est isocèle en A.
4. Est-il équilatéral ? Justifier.

Exercice 3 Soit $ABCD$ un carré et E un point de $[BC]$, distinct de B et C.

1. Construire le cercle circonscrit $\mathcal{C}$ au triangle ACE.
   On note O le centre de $\mathcal{C}$ et F le point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de (CD) qui est différent de C.
2. Montrer que les points E, O et F sont alignés.
3. On note r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   (a) Montrer que $r(B) = D$.
   (b) Montrer que $r((BC)) = (CD)$.
   (c) Montrer que le triangle AEF est rectangle en A.
   (d) En déduire que $r((AE)) = (AF)$. Justifier.
4. Déduire des questions 3.(b) et 3.(d) que $r(E) = F$.
5. Montrer que $BE = DF$.

Exercice 4 Un triangle ABC "orthomédian" selon A et B est un triangle dont les médianes issues de A et B sont perpendiculaires.

1. Proposer une construction et construire un triangle ABC "orthomédian" selon A et B.
2. Exprimer la somme des carrés des deux cotés $CA^2 + CB^2$ en fonction du carré du troisième AB^2. Justifier.

Université de Reims Champagne Ardenne
UFR Sciences Exactes et Naturelles

Année universitaire 2012-2013
SEN 0505 - Licence 3

Devoir Surveillé 2 - Mercredi 5 Décembre

Exercice 1

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.
Pour chaque question, on fera une figure différente. On pourra aussi prendre un cercle de rayon "plus grand" que 1 *pour le tracé des figures.*

1. (a) Construire un triangle équilatéral ABC inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$. Expliquer la construction.
   (b) Montrer que $AB \times AC = 3$. Justifier.
2. (a) Construire un carré $DEFG$ inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$. Expliquer la construction.
   (b) Montrer que $DE \times DF \times DG = 4$. Justifier.
3. (a) Construire un hexagone $HIJKLM$ inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$. Expliquer la construction.
   (b) Montrer que $HI \times HJ \times HK \times HL \times HM = 6$.
4. (a) Construire un pentagone $NPQRS$ inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$. Expliquer la construction.
   (b) Quelle conjecture peut-on émettre sur la valeur du produit $NP \times NQ \times NR \times NS$? On ne demande pas de démontrer la conjecture.

Exercice 2

Soit $0 < x < 8$ un réel. Soit ABC un triangle tel que $AB = AC = 8\ cm$ et $BC = 4\ cm$. Considérons M un point de $[AB]$ et N un point de $[AC]$ tels que $AM = AN = x\ cm$.

1. Construire la figure pour une valeur quelconque de x.
2. Quelle est la nature du triangle AMN ? Justifier.
3. Rappeler la définition d'un trapèze isocèle.
4. Montrer que le quadrilatère $BMNC$ est un trapèze isocèle. Justifier.
5. Soit I le milieu de $[BC]$ et J le milieu de $[MN]$. Montrer que les points A, J et I sont alignés. Justifier.
6. Calculer la longueur AI puis l'aire $\mathcal{A}_{ABC}$.
7. Calculer en justifiant la longueur MN et la longueur AJ. En déduire l'aire $\mathcal{A}_{AMN}$.
8. Exprimer l'aire $\mathcal{A}_{BMNC}$ en fonction de $\mathcal{A}_{ABC}$ et de $\mathcal{A}_{AMN}$.
9. Déterminer la valeur de x pour laquelle $\mathcal{A}_{BMNC} = \mathcal{A}_{AMN}$.

Examen terminal :
Géométrie plane et dans l'espace

La durée du devoir est de 1h30. Les documents et les téléphones portables sont interdits. La calculatrice est autorisée. Il sera tenu compte de la qualité de la présentation et des explications dans la notation.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1

On considère deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de centres respectifs O et O' sécants en deux points distincts A et B. On note A' le symétrique de A par rapport à O et B' le symétrique de B par rapport à O'. Enfin, on note I le milieu du segment $[AB]$.

1. Construire la figure.
2. Quelle est la nature du quadrilatère $AB'BA'$? Justifier.
3. Démontrer que (OO'), (AB') et $(A'B)$ sont trois droites parallèles.
4. Montrer la relation :
$$OO' = \frac{AB'}{2} + \frac{A'B}{2}.$$

Exercice 2

On considère dans l'espace un cube $ABCDEFGH$ tel que AE soit une arrête et $AE = 1$.

1. Soit I le milieu du segment $[HG]$. Quelle est la nature du triangle ABI ? Justifier.
2. Soit K le milieu du segment $[AB]$. Montrer que (IK) et (AB) sont perpendiculaires. Justifier.
3. Calculer l'aire $\mathcal{A}_{ABI}$.
4. Notons J le centre du carré $ADHE$. Calculer la longueur IJ.
5. Notons L le centre du carré $BCGF$. Quelle est la nature du quadrilatère $IJKL$? Justifier.
6. En déduire que les droites (JL) et (AB) sont parallèles. Justifier.
7. La pyramide $ADHEL$ est-elle régulière ? Justifier.
8. Calculer le volume de la pyramide $ADHEL$.

Exercice 3 *Calcul d'une valeur approchée de π*

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de rayon 0.5.

1. Construire le carré $ABCD$ inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$. On prendra pour le tracé de la figure un cercle de rayon "plus grand" que 0.5.
2. Calculer la longueur AB. En déduire le périmètre de $ABCD$ (valeur exacte et approchée).
3. La médiatrice du segment $[AB]$ coupe le segment $[AB]$ au point K et le cercle $\mathcal{C}$ au point I (appartenant au plus petit arc de cercle entre A et B).
   (a) Justifier que les points O, K et I sont alignés.
   (b) Calculer les longueurs OK et KI.
   (c) Montrer que $IA = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$.
   (d) En déduire, en justifiant, le périmètre d'un octogone ($n = 8$) inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ (valeur exacte et approchée).

4. La médiatrice du segment $[IA]$ coupe le cercle $\mathcal{C}$ au point J (appartenant au plus petit arc de cercle entre A et I). En faisant le même raisonnement qu'à la question 3., on peut montrer que (ceci n'est pas à démontrer) :

$$AJ = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{1-IA^2}} \simeq 0.1951.$$

   (a) En déduire une valeur approchée du périmètre d'un hexadécagone ($n = 16$) inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$.

   (b) De quel nombre connu semble se rapprocher le périmètre du polygone ? Expliquer pourquoi.