L1-MA0202
Algèbre linéaire
Groupes A1-A5

Faculté des Sciences
Exactes et Naturelles
Reims Champagne-Ardenne
2016-2017

Interrogation écrite du lundi 27 février 2017

Durée: 90 minutes
Tous les documents, calculatrices, téléphones portables ne sont pas autorisés.
Toutes les réponses doivent être précisément justifiées.
La clarté des réponses sera prise en compte dans l'attribution de la note.

Exercice 1

On munit l'espace $\mathbb{R}^2$ de l'addition habituelle $x+y$, $x \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}^2$, définie par,

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,$$

et de la multiplication par un réel $\lambda \star x$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^2$, définie par,

$$\lambda \star (x_1, x_2) = (\lambda x_2, \lambda x_1), \quad \lambda \in \mathbb{R},\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

L'ensemble $(\mathbb{R}^2, +, \star)$ est-il un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. En utilisant certaines des huit propriétés vérifiées par les espaces vectoriels, montrer que,

$$\forall\, u \in E,\ x + x = 2\,.\,x.$$

En particulier, citer précisément quelles sont le propriétés utilisées, parmi les huit propriétés du cours.

Exercice 3

Déterminer si les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ ou non.

$$\begin{aligned} F_1 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 2y - 8z = 0\right\} \\ F_2 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [-1,1]\right\} \\ F_3 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{Z}\right\} \end{aligned}$$

Exercice 4

On considère $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions f définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition et la multiplication par un réel habituelles.

1. Rappeler quel est l'élément neutre de l'addition.
2. On définit E comme
$$E = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}.$$
E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Exercice 5

Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

1. Rappeler quel est l'élément neutre de l'addition.
2. On fixe dans cette question une matrice A_0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère alors l'ensemble
$$F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid MA_0 = A_0M\}.$$
L'ensemble F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?