Université de Reims Champagne-Ardenne **Année universitaire 2016/2017**
Licence MI 1ère année **MA0102**

IE N^{o}2

Durée de l'épreuve : 1 heure 15 minutes

Les documents, téléphones portables et calculatrices **ne sont pas** autorisés. Le barème est indicatif.

Exercice 1 (3 points) :

Soient P et Q deux énoncés mathématiques.

1. Donner la définition de la contraposée de l'énoncé $P \Rightarrow Q$.
2. Montrer que l'énoncé $P \Rightarrow Q$ et sa contraposée sont des énoncés équivalents.

Exercice 2 (3 points) :

Soit $E = \{1, 2, 3\}$. Pour chaque affirmation ci-dessous, indiquer sans justification si elle est vraie ou fausse :

a) $2 \in E$ b) $2 \subset E$ c) $\{1, 3\} \in E$ d) $\{1, 3\} \subset E$ e) $\emptyset \in E$ f) $\emptyset \subset E$

Exercice 3 (4 points) :

Soient $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x+1 \end{array}$, $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R}^\star \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x^2} \end{array}$, et $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$.

1. L'application $f \circ g$ existe-t-elle ? Si oui, déterminer-la.
2. Mêmes questions avec $g \circ f$, $f \circ h$ et $h \circ f$.

Exercice 4 (6 points) :

Soit $f : E \to F$ une application. On considère les énoncés suivants :

$$P_1 \ : \ \forall (x,x') \in E^2 , \ \ \big[f(x) = f(x') \ \Rightarrow \ x = x' \big] \ .$$

$$P_2 \ : \ \forall y \in F , \ \ \exists x \in E \ \text{ tel que } \ f(x) = y \ .$$

1. Donner la négation de l'énoncé P_1.
2. Donner la négation de l'énoncé P_2.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 1$.
   (a) Montrer que f n'est pas injective.
   (b) Montrer que f n'est pas surjective.
4. Soit $f : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ définie par $f(x) = x^2 + 1$. Montrer que f est bijective.

Exercice 5 (5 points) :

Soient A, B, A', B' quatre ensembles.

1. Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} A \times B & \to & B \times A \\ (a,b) & \mapsto & (b,a) \end{array}$ est bijective.
2. Montrer que :
$$\Big(A \subset A' \ \text{ et } \ B \subset B' \Big) \implies A \cap B \subset A' \cap B' \ .$$
3. Montrer que :
$$\Big(A \subset A' \ \text{ et } \ B \subset B' \Big) \implies A \times B \subset A' \times B' \ .$$