Université de Reims Champagne-Ardenne **Année universitaire 2016/2017**
Licence Math-Info 1ère année **MA0102**

IE N^{o}3

Durée de l'épreuve : 1 heure 15 minutes

Les documents, téléphones portables et calculatrices **ne sont pas** autorisés. Le barème est indicatif.

Exercice 1 (5 points) :

1. On considère les ensembles $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et $F = \{1, 2, 4, 6\}$. Pour chaque affirmation ci-dessous, indiquer sans justification si elle est vraie ou fausse :

   a) $F \in E$ b) $F \subset E$ c) $F \in \mathcal{P}(E)$ d) $\{2\} \in F$
2. On note $X =]-\infty, 0[$ et $Y =]0, +\infty[$. Donner un élément de $X \times Y$.
3. Soient A, B, A', B' quatre ensembles. Montrer que :

$$\big(\ A \subset A' \ \text{ et } \ B \subset B'\ \big) \implies A \times B \subset A' \times B' \ .$$

Exercice 2 (3points) :

Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Sans justifier, donner deux éléments x et y de E tels que la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par :

$$1\mathcal{R}1\,,\ \ 2\mathcal{R}2\,,\ \ 3\mathcal{R}3\,,\ \ 4\mathcal{R}4\,,\ \ 1\mathcal{R}2\,,\ \ 2\mathcal{R}1\,,\ \ 3\mathcal{R}4\,,\ \ x\mathcal{R}y\ ,$$

soit une relation d'équivalence. Puis, donner la classe d'équivalence de l'élément 1 et l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$.

Exercice 3 (4 points) :

On définit la relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{R}^\star$ en posant, pour tout couple $(x, y) \in (\mathbb{R}^\star)^2$,

$$x\mathcal{R}y \quad \Longleftrightarrow \quad y = x \text{ ou } y = 1/x\ .$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. On note $\mathrm{Cl}(x)$ la classe d'équivalence d'un élément x.
   (a) Donner $\mathrm{Cl}(2)$.
   (b) Trouver tous les éléments $x \in \mathbb{R}^\star$ tels que $\mathrm{Cl}(x) = \{x\}$.

Exercice 4 (9 points) :

On considère les applications suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R}^\star \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x^2} \end{array}, \quad g : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to &]0, +\infty[\\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x^2} \end{array} \quad \text{et} \quad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x + 1 \end{array}.$$

1. L'application $f \circ h$ existe-t-elle ? Si oui déterminer-la.
2. Mêmes questions avec $h \circ f$.
3. Montrer que f n'est pas bijective.
4. Montrer que g est bijective et déterminer son application réciproque.
5. Vérifier que $h^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \dfrac{y-1}{2} \end{array}$ est l'application réciproque de h.
6. On utilisera dans cette question les résultats des questions 4 et 5.
   (a) Sans la calculer, justifier que l'application $h \circ g$ est bijective .
   (b) Déterminer rapidement $(h \circ g)^{-1}$ à l'aide de ce qui précède.