Indications - DM 0

A rendre le Jeudi 1 Septembre

Exercice 1

1. Il suffit d'appliquer correctement les propriétés du logarithme.

2. (a) On exprime t_{n+1} sous la forme $q \times t_n$ où q sera la raison de la suite géométrique.
   (b) On applique la formule du cours.
   (c) Pour montrer que $t_0 \leq 0$, il faut partir de l'hypothèse de l'énoncé $b_0 > a_0$.
   Avec la question précédente, on peut alors en déduire le signe de $t_n = u_n - v_n$.
   (d) Utiliser encore la question 2.(b)

3. Toujours la même méthode : on cherche le signe de $u_{n+1} - u_n$ (resp. $v_{n+1} - v_n$). Penser à utiliser la question 2.(c) ensuite.

4. (a) Les suites ne seraient-elles pas adjacentes ?
   (b) Exprimer a_n en fonction de u_n et b_n en fonction de v_n puis passer à la limite.

5. (a) Il s'agit de montrer que $w_{n+1} = w_n$.
   (b) D'après la question précédente, $w_n = a_0 b_0$ et on fait tendre n vers $+\infty$ dans cette dernière égalité.
   (c) /

Exercice 2

1. /

2. (a) Il suffit de partir du membre de droite et d'utiliser correctement les relations de récurrence sur les suites.
   (b) Première méthode : On remarque avec la question précédente que la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. On utilise alors la formule explicite des suites géométrique.
   Deuxième méthode : Par récurrence, en utilisant la question précédente pour l'hérédité.

3. (a) Toujours la même méthode : on cherche le signe de $u_{n+1} - u_n$ (resp. $v_{n+1} - v_n$). Penser à utiliser la question 2.(b) ensuite.
   (b) On utilise les questions précédentes pour montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. On peut alors appliquer le théorème des suites adjacentes pour conclure.
   (c) /

4. (a) Appliquer la formule d'une somme géométrique.
   (b) Utiliser les relations de récurrence sur les suites pour démontrer la première égalité.
   Avec cette première égalité (attention, celle-ci n'est valable qu'à partir du rang 1), mettre S_n sous la forme d'une somme télescopique puis la calculer.
   (c) Exprimer u_n en fonction de S_n avec la question 4.(b) puis u_n en fonction de n avec la question 4.(a). Comme u_n est maintenant sous forme explicite, on peut alors calculer sa limite.

Exercice 3

1. (a) Pour déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ d'une fonction f, on regarde s'il y a dans l'expression de f :

- Un dénominateur : il faut supprimer de $\mathscr{D}_f$ les racines de ce dénominateur.
- $\sqrt{u(x)}$: il faut résoudre l'inéquation $u(x) \geq 0$ et restreindre $\mathscr{D}_f$ à l'ensemble des solutions.
- $\ln(u(x))$: il faut résoudre l'inéquation $u(x) > 0$ et restreindre $\mathscr{D}_f$ à l'ensemble des solutions.

Pour les limites (en $\pm\infty$), il faut levé la forme indéterminée en factorisant par le terme dominant au dénominateur.

(b) Appliquer la formule de dérivée d'un quotient et factoriser la dérivée pour obtenir son signe puis le tableau de variation.

(c) Appliquer la formule de l'équation d'une tangente en un point. On doit trouver l'équation $y = x$ pour T.

(d) Il faut étudier le signe de $f(x) - x$ en factorisant cette expression.

(e) /

2. (a) Raisonner par différence en cherchant le signe de $\dfrac{1}{n+1} - f(\dfrac{1}{n})$ (en factorisant !).
   (b) Pour l'hérédité, il faut partir de l'hypothèse de récurrence, composer les inégalités par f (qui est croissante sur $[0,1]$) puis utiliser la question précédente.
   (c) Appliquer le théorème d'encadrement.

3. (a) Partir du membre de gauche et appliquer la relation de récurrence sur la suite.
   (b) Pour l'hérédité, appliquer la question précédente puis l'hypothèse de récurrence à $\dfrac{1}{u_n}$ et la question 2.(b) à u_n.
   (c) i. Étudier les variations de la fonction $\varphi(x) = \ln(1+x) - x$.
       ii. Prendre $x = -\dfrac{1}{k}$ dans l'inégalité précédente puis utiliser les propriétés algébriques du logarithme.
       iii. On somme les inégalités précédentes pour k allant de 2 à n. Pour le membre de droite, on obtient une somme télescopique à simplifier.
   (d) Appliquer les question 3.(b) et 3.(c).
   (e) Avec la question 2.(b) et 3.(d), on encadre nu_n puis on applique le théorème d'encadrement.

Exercice 4

1. (a) Pour étudier les variations de g, on donne ensemble de définition, continuité, dérivabilité, on dérive, on factorise si possible la dérivée et on dresse le tableau de variation.
   (b) Utiliser le tableau de variation précédent.

2. (a) f est définie si $e^x + 2x - 1 > 0$, donc...
   (b) Pas de forme indéterminée ici donc pas de difficulté normalement.
   (c) Pour étudier les variations de f, on précise si f est continuité et dérivabilité sur $\mathscr{D}_f$, on dérive, on factorise si possible la dérivée et on dresse le tableau de variation.
   (d) Raisonnement en deux étapes :
       - On commence par prouver que f est une bijection de ?? dans ?? à l'aide du théorème de la bijection.
       - On vérifie que 0 appartient à l'intervalle image de f et donc qu'il admet un unique antécédent par f.
   (e) On commence par classer les images $f(1/4)$, $f(\alpha)$ et $f(1/2)$ puis on revient aux antécédents à l'aide des variations de f.

3. (a) Il faut penser à factoriser par e^x dans le logarithme puis séparer en deux à l'aide des propriétés du logarithme puis utiliser les croissances comparées.

   (b) On utilise la forme simplifiée précédente pour calculer $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax)$.

   Si $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b$, alors $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ et on obtient l'équation de l'asymptote oblique.

   (c) Il faut résoudre l'inéquation $f(x) - (ax+b) \geq 0$. On pourra encore utiliser la forme simplifiée de la question 3.(a).

4. /

Exercice 5

1. /

2. (a) Pour étudier les variations de f, on donne ensemble de définition, continuité, dérivabilité, on dérive, on factorise si possible la dérivée et on dresse le tableau de variation.

   (b) Même chose pour g.

   (c) Chacune des deux questions précédentes permet de démontrer une des deux inégalités demandées.

3. (a) Prendre $x = \dfrac{k}{n^2}$ dans les inégalités démontrées à la question précédente.

   (b) Sommer les inégalités de la question 3.(a) pour k allant de 1 à n. On obtient S_n pour le terme au centre. Pour les termes de gauche et de droite, on le calcule des sommes qui apparaissent à l'aide des formules du cours.

4. (a) Pour lever les formes indéterminées, on factorise au numérateur par le terme dominant.

   (b) Appliquer le théorème d'encadrement.

   (c) Pour faire le lien entre (S_n) et (P_n), il faut appliquer la formule $\ln\left(\prod \ldots\right) = \sum \ln(\ldots)$.
   On utilise alors une composition des limites pour déduire la limite de (P_n) de celle de (S_n).
