Indications - DM 1

A rendre le Jeudi 2 Septembre

Exercice 1

1. Il suffit d'appliquer correctement les propriétés du logarithme.
2. (a) On exprime t_{n+1} sous la forme $q \times t_n$ où q sera la raison de la suite géométrique.
   (b) On applique la formule du cours.
   (c) Pour montrer que $t_0 \leq 0$, il faut partir de l'hypothèse de l'énoncé $b_0 > a_0$.
   Avec la question précédente, on peut alors en déduire le signe de $t_n = u_n - v_n$.
   (d) Utiliser encore la question 2.(b)
3. Toujours la même méthode : on cherche le signe de $u_{n+1} - u_n$ (resp. $v_{n+1} - v_n$). Penser à utiliser la question 2.(c) ensuite.
4. (a) Les suites ne seraient-elles pas adjacentes ?
   (b) Exprimer a_n en fonction de u_n et b_n en fonction de v_n puis passer à la limite.
5. (a) Il s'agit de montrer que $w_{n+1} = w_n$.
   (b) D'après la question précédente, $w_n = a_0 b_0$ et on fait tendre n vers $+\infty$ dans cette dernière égalité.
   (c) /

Exercice 2

1. (a) Pour étudier les variations de f, on donne ensemble de définition, continuité, dérivabilité, on dérive, on factorise si possible la dérivée et on dresse le tableau de variation.
   (b) Utiliser le tableau de variation obtenu à la question précédente.
   (c) /
2. (a) Suivre les indications et simplifier.
   (b) Toujours la même méthode : on cherche le signe de $u_{n+1} - u_n$. Penser à utiliser la question précédente.
3. (a) Suivre les indications et simplifier.
   (b) Toujours la même méthode : on cherche le signe de $u_{n+1} - u_n$. Penser à utiliser la question précédente.
4. (a) Simplifier $u_n - v_n$ puis faire tendre n vers $+\infty$.
   (b) Les suites ne seraient-elles pas adjacentes ?
   (c) /

Exercice 3

1. (a) Par récurrence. Pour l'hérédité, deux choses à démontrer :
   - u_{n+1} est bien définie : il suffit de montrer que le dénominateur est non nul.
   - $u_{n+1} \geq 1$: partir de $u_{n+1} - 1$ est factoriser.

   (b) Il faut passer à la limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1 + 2u_n}{2 + u_n}$ puis résoudre l'équation obtenue.

2. (a) On exprime v_{n+1} sous la forme $q \times v_n$ où q sera la raison de la suite géométrique.
   (b) On applique la formule du cours pour obtenir v_n. Et pour u_n, on utiliser ensuite que $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.
   (c) Comme (u_n) est sous forme explicite, il suffit de passer à la limite dans son expression.

3. (a) Attention, on vous demande le signe, pas les variations ! Il suffit de factoriser puis de faire un tableau de signe.
   (b) Utiliser la question précédente avec $x = u_n$. Rappelons que $u_n \geq 1$ d'après la question 1.(a).
   (c) Appliquer le théorème des suites monotones pour prouver la convergence de (u_n). Pour expliciter la limite, penser à la 1.(b).

4. /

Exercice 4

1. (a) Pour étudier les variations de g, on donne ensemble de définition, continuité, dérivabilité, on dérive, on factorise si possible la dérivée et on dresse le tableau de variation.
   (b) Utiliser le tableau de variation précédent.

2. (a) f est définie si $e^x + 2x - 1 > 0$, donc...
   (b) Pas de forme indéterminée ici donc pas de difficulté normalement.
   (c) Pour étudier les variations de f, on précise si f est continuité et dérivabilité sur $\mathscr{D}_f$, on dérive, on factorise si possible la dérivée et on dresse le tableau de variation.
   (d) Raisonnement en deux étapes :
   - On commence par prouver que f est une bijection de ?? dans ?? à l'aide du théorème de la bijection.
   - On vérifie que 0 appartient à l'intervalle image de f et donc qu'il admet un unique antécédent par f.

   (e) On commence par classer les images $f(1/4)$, $f(\alpha)$ et $f(1/2)$ puis on revient aux antécédents à l'aide des variations de f.

3. (a) Il faut penser à factoriser par e^x dans le logarithme puis séparer en deux à l'aide des propriétés du logarithme puis utiliser les croissances comparées.
   (b) On utilise la forme simplifiée précédente pour calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax)$.
   Si $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ et on obtient l'équation de l'asymptote oblique.
   (c) Il faut résoudre l'inéquation $f(x) - (ax + b) \geq 0$. On pourra encore utiliser la forme simplifiée de la question 3.(a).

4. /

Exercice 5

1. Par récurrence. Pour l'hérédité, trois choses à démontrer :
   - u_{n+1} et v_{n+1} sont bien définies : il suffit de montrer que le dénominateur $u_n + v_n$ est non nul.
   - $u_{n+1} > 0$: utiliser l'hypothèse de récurrence.
   - $u_{n+1} < v_{n+1}$: partir de $v_{n+1} - u_{n+1}$, factoriser puis utiliser l'hypothèse de récurrence.

2. /

3. (a) Toujours la même méthode : on cherche le signe de $u_{n+1} - u_n$. Utiliser ensuite les théorèmes des suites monotones.
   (b) Toujours la même méthode : on cherche le signe de $v_{n+1} - v_n$. Utiliser ensuite les théorèmes des suites monotones.
   (c) Il faut passer à la limite dans l'inégalité $0 < u_n < v_n$ démontrée à la question 1.

4. (a) Deux méthodes : soit par récurrence, soit en montrant que la suite $w_n = v_n - u_n$ est constante égale à 1.
   (b) Par passage à la limite dans l'égalité de la question précédente.
   (c) Suivre les indications de l'énoncé puis utiliser l'égalité de la question 4.(b) pour obtenir une équation ne faisant intervenir que ℓ_1. En déduire ℓ_1 puis ℓ_2 encore avec la question 4.(b).
