Indications - DM 10

A rendre le Mardi 7 Janvier

Exercice 1

1. Pour prouver qu'une intégrale existe :
   - On justifie proprement que la fonction intégrée est continue entre les bornes.
   - On vérifie si elle est généralisée ou pas : si elle n'est pas généralisée, c'est terminé. Sinon, on justifie la convergence de l'intégrale.
2. Ne pas oublier le u' dans les formules de primitives.
3. (a) Très classique : par construction, en partant de $t^n \geq t^{n+1}$ (car $t \in [0,1]$), on compare les fonctions à l'intérieur des intégrales u_n et u_{n+1} puis on intègre (en précisant que les bornes sont dans l'ordre croissant).

   (b) Commencer par majorer sous l'intégrale (en gardant les termes qui ne dépendent pas de n!) avant d'intégrer l'inégalité (en précisant que les bornes sont dans l'ordre croissant).

   (c) Théorème des suites monotones...
4. (a) Penser à la question 3.(b), où on a calculé une intégrale qui a donné $\ln(2)$.

   (b) Commencer par majorer sous l'intégrale avant d'intégrer l'inégalité (en précisant que les bornes sont dans l'ordre croissant).

   (c) Attention à bien obtenir un encadrement de u_n (les limites de suite ou fonction définies avec des intégrales s'obtiennent toujours par encadrement).
5. (a) Justifier en quelle(s) borne(s) elle est généralisée et séparer en deux intégrales si les deux bornes le sont. Ensuite, pour une convergence sans la valeur, on utilise un théorème de comparaison. On cherche alors dans l'ordre :
   - Une comparaison donnée par l'énoncé précédemment.
   - Un équivalent (en la borne où on est généralisée, et en pensant à factoriser les sommes par leurs termes prépondérants; en un point autre que 0 ou $\pm\infty$, penser à se ramener en 0 par un changement de variable.
   - Une négligeabilité, en priorité devant $\frac{1}{t^2}$ en $\pm\infty$ et devant $\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$ en 0.
   - Une inégalité à trouver soi-même.

   (b) Commencer à encadrer sous l'intégrale, puis intégrer l'inégalité.

   (c) A l'aide de l'encadrement précédent pour la première partie de la question. Avec la relation de Chasles pour la deuxième partie.

Exercice 2

1. (a) Pour toute intégrale, on déterminer en quelle(s) valeur(s) elle est généralisée en donnant l'intervalle sur lequel la fonction intégrée est continue.

   Pour obtenir la convergence et la valeur d'une intégrale généralisée, on passe par l'intégrale partielle ou par un moment d'une loi usuelle.

   (b) On a une expression en fonction de n : pour obtenir un équivalent simple, on factorise au maximum puis on factorise toutes les sommes par leur terme prépondérant et on utilise le fait qu'un facteur qui tend vers une limite finie non nulle est équivalent à cette limite. Enfin, s'il reste un facteur compliqué mais qui a la bonne forme on peut tenter de le simplifier par DL avant de factoriser par un terme prépondérant.

2. Pour prouver qu'une série converge sans obtenir sa valeur, on passe par un théorème de comparaison. On tente (dans cet ordre) : une inégalité donnée par l'énoncé (on ne cherche surtout pas à en trouver une soi-même), un équivalent (avec la méthode précédente), une négligeabilité devant le terme général d'une série convergente (en général $\frac{1}{n^2}$).

   Ici on n'a aucune inégalité, mais l'équivalent s'obtient sans problème.

3. (a) Méthode ultra classique : la comparaison série intégrale. Voir les nombreux exemples déjà faits en cours et en TD si la méthode n'est pas maîtrisée.
   (b) Suite de la méthode précédente, tout aussi classique.
   (c) Un peu moins classique mais habituel, l'obtention d'un équivalent en conclusion : il faut encadrer la quantité dont on cherche un équivalent, puis on divise alors par le plus simple des deux et les limites des deux côtés doivent valoir un, ce qui donne un quotient qui tend vers un au milieu, donc un équivalent.

4. /

Exercice 3

1. Classique, à savoir faire !

2. (a) Commencez par traduite l'évènement $(T_n = 1)$ puis si besoin, $(T_n = 2)$, $(T_n = 3)$,... jusqu'à trouver la formule générale qui traduire $(T_n = k)$ pour un nombre k fixé.
   (b) Attention l'évènement $(T_n = n)$ contient deux situations possibles : il sera de la forme $A \cup B$. Il faut trouver les 2 possibilités qui amènent à faire n lancers.
   (c) Ne pas oublier que le dernier terme de la somme (c'est-à-dire $P(T_n = n)$) n'a pas la même expression que les autres (cf question 2.(b)).
   (d) Idem précédemment + utiliser le préliminaire.

3. (a) Traduire comme d'habitude ! Il sera judicieux de remarquer que X_n suit une loi de Bernoulli et de calculer la probabilité la plus simple des 2 !
   (b) Trivial !

4. (a) Traduire ! Ne pas oublier, lorsque vous traduisez l'évènement $(Y_n = k)$ d'être certains que l'évènement choisi donne bien exactement k faces au cours des n lancers !!
   (b) Trivial.
   (c) Espérance d'une somme : on utilise la linéarité de l'espérance.

5. On rappelle que l'évènement `rand()<p` est de probabilité p donc il représente l'évènement "obtenir PILE" et donc l'évènement contraire `rand()>p` représente "FACE".
