Indications - DM 11

A rendre le Mercredi 17 Janvier

Exercice 1

1. On peut calculer $P(D_1 = D_2)$ en décomposant cet évènement sur le système complet d'évènements des valeurs prises par D_1 : $(D_1 = i)_{1 \leq i \leq 6}$.

   De même pour calculer $P(D_1 < D_2)$. Pour cette seconde proba, on peut aussi remarquer que par symétrie du problème, $P(D_1 < D_2) = P(D_2 < D_1)$ et obtenir cette valeur commune en remarquant que $P(D_1 = D_2) + P(D_1 < D_2) + P(D_2 < D_1) = 1$.

2. Évident.

3. Évident.

4. $Y_2 = X_1 + X_2$ donc une fois $Y_2(\Omega)$ obtenu, on calcule les probabilités à l'aide du système complet associé à l'une des deux variables (pas très difficile de savoir laquelle).

5. (a) Évident.
   (b) Attention à ne surtout pas simplifier les fractions : il y en a pour des heures !
   (c) Calcul d'une loi marginale : on décompose sur le système complet d'évènements de Y_2.

6. Évident si on revoit la définition de ces différentes variables.

   Ne pas oublier que contrairement à l'espérance d'une somme, la variance d'une somme de variables est la somme des variances uniquement si ces variables sont indépendantes.

7. /

8. (a) On reconnaîtra ici une loi usuelle.
   (b) Évident.

9. (a) Attention à la première valeur possible.
   (b) Écrire proprement ces évènements en fonction des tirages élémentaires.
   (c) Écrire proprement cet évènement en fonction des tirages élémentaires. On pourra s'aider d'un arbre au brouillon, et du résultat donné pour comprendre comment l'évènement doit s'écrire.
   (d) Évident.
   (e) Calcul de somme pas excessivement difficile. Attention à ne pas confondre somme finie et infinie. Attention à justifier la convergence si c'est une somme infinie.
   (f) Remarquer qu'on a calculé la probabilité de son contraire précédemment.
   (g) Attention à justifier de son existence même si l'énoncé en fait fi. Pour la convergence et la valeur d'une série, on passe par la somme partielle.
   Le calcul de somme n'a rien d'exceptionnel, mais demande beaucoup de propreté, notamment pour l'utilisation des séries géométriques dérivées première et seconde.

Exercice 2

1. (a)
   - Attention, la fonction a deux expressions donc il faudra étudier la valeur en 0 à part !
   - On justifie la continuité sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ (pas de réunion car les propriétés de régularité sont sur des intervalles) par opérations élémentaires.

- Le point particulier doit être étudié avec la définition de la continuité en un point. S'il y a une forme indéterminée sans terme prépondérant dans les sommes, on pensera à utiliser un développement limité (d'autant qu'on étudie ici la fonction exp en 0, c-a-d là où on connait un DL).

(b)
- Comme le point 0 est retiré, on obtient la classe C^1 par opérations élémentaires. Le calcul de la dérivée ne doit pas poser de problème particulier.

(c) On cherche une limite en 0. Pour cela :
- On factorise au maximum et on simplifie, puis on essaie les opérations élémentaires sur les limites.
- On lève les éventuelles indéterminations en factorisant toutes les sommes par leur terme prépondérant.
- Si c'est insuffisant, on repère une forme usuelle de DL pour appliquer un DL.

(d) Pour calculer une limite : on simplifie au maximum et on factorise au maximum s'il y a des facteurs communs dans les sommes, puis on utilise la méthode décrite dans la question précédente.

(e) On rappelle qu'une fonction est de classe $mathscrC^1$ en un point si 1) elle est dérivable en ce point; 2) sa dérivée est continue en ce point.

2. (a)
- Ne pas oublier la dérivabilité avant de dériver.
- Pour obtenir un signe, on factorise au maximum et on cherche le signe de chaque facteur.
- Si un des facteurs n'a pas un signe évident (premier ou deuxième degré en une variable $X = u(x)$ ou somme de termes de même signe), on peut poser une fonction égale à ce facteur et l'étudier.

(b) L'obtention d'un signe vient d'être expliquée précédemment.

(c) Les limites en $+\infty$ et $-\infty$ s'obtiennent de manière similaire aux limites en 0. Par contre les DL ne peuvent être utilisés qu'en une variable $u = g(x)$ qui tend vers 0.

3. /

4. **Rappel :** Un point fixe de f est une solution de l'équation $f(x) = x$.

On veut la solution de l'équation, il faut donc la résoudre. Le théorème de la bijection est a priori à exclure, à moins qu'on n'arrive pas à résoudre l'équation.

5. (a) La méthode d'obtention d'un signe a été vue précédemment.

(b) Pour montrer une égalité, partir du plus compliqué (celui sur lequel on peut faire un calcul) pour aller vers le plus simple. Ici, c'est le côté gauche qui est plus compliqué.

(c)
- Pour montrer un encadrement, on sépare en deux inégalités.
- Pour montrer une inégalité, on passe tout d'un côté pour se ramener à un signe.
- L'obtention d'un signe a déjà été vue à plusieurs reprises dans l'exercice.

(d) Question bien connue sur les suites récurrentes, qui s'obtient avec les accroissements finis.

6. Conséquence habituelle de la question précédente, à prouver par récurrence.

7. Conclure par encadrement avec la question précédente (toujours la même méthode, à maîtriser parfaitement).

8. /

9. Question ultra classique :

- On justifie que f admet une primitive F (avec le bon argument!) dont on détermine les propriétés de régularité à l'aide de celles de f (f de classe $\mathscr{C}^k$ donc F de classe $\mathscr{C}^{k+1}$).

- On réécrit l'expression de G en fonction de F, et on en déduit la régularité de G et sa dérivée.
- Attention à la dérivée de la composée: rappel : $(F(u))' = u'F'(u)$!!

10. (a)
    - Pour montrer un encadrement, on sépare en deux inégalités.
    - Pour montrer une inégalité sur une intégrale, on commence par majorer ou minorer à l'intérieur de l'intégrale puis on intègre (avec des bornes soit croissantes soit décroissantes).
    - On obtient alors la limite de la fonction intégrale par encadrement ou comparaison.

    (b) Similaire à la question précédente.

11. Il reste donc à obtenir le signe de G', toujours avec la même méthode.
