Indications - DM 12

A rendre le Vendredi 24 Janvier

Exercice 1

1. (a) Facile dès qu'on remplace proprement k par 0 puis par 1.
   (b) Partir du plus compliqué (la droite), et mettre au même dénominateur.
   (c) Partir du plus compliqué (la droite), essayer d'écrire comme une seule somme et utiliser la question précédente.
   (d) Pas difficile si on fait proprement sa récurrence. Attention à bien identifier l'hypothèse de récurrence (à k, pas à $k+1$) et à ne pas utiliser ce qu'on ne sait pas encore, cad la valeur de $s_{k+1}(x)$...

2. (a) La question semble indiquer une loi usuelle. Penser à toujours commencer par $N(\Omega)$.
   (b) Attention à ne pas sauter sur la définition des probas conditionnelles!! Interpréter le "sachant $(N = n)$" pour obtenir la nouvelle situation de l'expérience, et chercher alors la probabilité de $(X = k)$ dans cette expérience.
   (c) On a une des lois marginales d'un couple : utiliser les probas totales avec le bon système complet d'évènements.
   (d) Idem.
   (e) Attention à justifier que l'espérance existe avant de conclure.
   (f) C'est une fonction de répartition de variable discrète : il faut revenir aux évènements élémentaires de la variable X, qui sont les $(X = i)$.
   On doit alors sommer les valeurs de $P(X = i)$ pour les valeurs de i qui conviennent pour l'évènement cherché.
   (g) /

3. Les indications sont données dans l'énoncé. Programme très simple qui se fait en trois lignes.

4. (a) Attention, il y a a priori deux choses à démontrer (F est une fonction de répartition d'une certaine variable <u>et</u> que cette variable est à densité).
   Rappels : Une fonction est la fonction de répartition d'une variable aléatoire Y et cette variable Y est à densité si :
   - F est continue sur tout $\mathbb{R}$ et est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points ;
   - F est croissante sur $\mathbb{R}$;
   - $\lim\limits_{-\infty} F = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} F = 1$

   (b) **Rappels** : Pour obtenir une densité f de Y, il suffit de dériver sa fonction de répartition F sur $\mathbb{R}$.
   Si jamais il y a des points où F n'est pas dérivable, on peut donner n'importe quelle valeur arbitraire positive à f en ces points (on dit donc "une" densité et non "la" densité).
   (c) Prendre une primitive sous la forme $G(x) = \int_0^x g(t)dt$ puis calculer celle si à l'aide d'une intégration par parties.
   (d) **Rappels** : Y admet une espérance si $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ converge absolument et alors

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt.$$

Exercice 2

1. Pour prouver qu'une intégrale existe :

   - On justifie proprement que la fonction intégrée est continue entre les bornes.
   - On vérifie si elle est généralisée ou pas : si elle n'est pas généralisée, c'est terminé. Sinon, on justifie la convergence de l'intégrale.

2. Pour établir la parité ou imparité d'une fonction, on justifie toujours que son intervalle de définition est centré en 0. Ensuite, on prouve que $f(-x) = f(x)$ ou $-f(x)$, avec autant de cas qu'il en existe dans la définition de la fonction.

   Cas particulier : pour la parité/imparité d'une fonction intégrale, on utilise presque toujours (sauf si les bornes sont opposées) le changement de variable $u = -t$.

3. (a) Pour la classe $\mathscr{C}^k$ d'une fonction définie par une intégrale, on utilise toujours et très précisément la méthode suivante :
      - On justifie que la fonction intégrée est continue donc admet une primitive.
      - On justifie que cette primitive est de classe $\mathscr{C}^k$ car sa dérivée est de classe $\mathscr{C}^{k-1}$.
      - On réécrit la fonction sans intégrale en se servant de la primitive.
      - On conclut par somme et composée.

   (b) Pour calculer la dérivée d'une fonction intégrale, on utilise la nouvelle expression de la fonction avec une primitive de la fonction intégrée, puis on dérive cette expression sans difficulté.

   Pour déterminer un signe, on factorise au maximum (factorisations réelles) puis on réalise un tableau de signe. Les facteurs récalcitrants peuvent alors être étudiés par une étude de fonction.

4. (a) Lorsqu'on prouve des inégalités ou encadrements par transformations successives, on doit justifier à chaque ligne le sens des inégalités (stricte positivité ou négativité du facteur quand on multiplie par un facteur, stricte croissance ou décroissance quand on compose par une fonction, sens des bornes quand on intègre).

   Cas particulier : quand on compose par l'inverse, on vérifie toujours (et on précise sur la copie) que tous les termes sont de même signe.
   Attention, $\sqrt{x^2}$ ne vaut pas x, mais $|x|$! Ensuite il faut justifier (sur la copie !) du signe de x pour savoir si cela donne x ou $-x$.

   (b) Les limites de fonction ou suite définies par une intégrale s'obtiennent toujours par encadrement.

   (c) Attention, cela demande de donner toutes les limites aux bornes. Pour la deuxième limite, avant de chercher à réencadrer la fonction intégrale comme dans la question précédente (on rappelle qu'une limite de fonction intégrale ne peut s'obtenir que par encadrement), vérifier les informations des questions précédentes.

   (d) Difficile du point de vue de la méthode. A priori quand on demande d'obtenir le nombre de solutions et leurs valeurs d'une équation, on fait systématiquement une résolution explicite d'équation. Sauf que...on ne sait pas résoudre explicitement une équation avec une intégrale !

   La seule solution est alors de prendre la question autrement : on justifie d'abord que l'équation admet une unique solution (théorème bien connu a priori), puis on cherche une solution simple (points particuliers définis dans l'énoncé à propos de la fonction, ou alors les nombres les plus simples possibles).

5. (a) Pour obtenir une inégalité avec une racine carrée, on isole la racine carrée puis :
      - Si l'autre terme est aussi positif, on compose par le carré croissant pour enlever la racine puis on conclut avec l'étude de l'inégalité équivalente obtenue.

- Si l'autre terme est négatif, on ne peut pas composer mais on conclut immédiatement puisque la racine est positive.
- Si l'autre terme change de signe selon les valeurs de x, on fait deux cas.

(b) Ne pas oublier la dérivabilité. Ne pas développer n'importe comment au dénominateur : on veut des expressions factorisées au maximum !

(c) Il faut donc primitiver $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$, à quoi peut bien servir la question précédente ?

6. (a) Pour obtenir une égalité avec une intégrale, il faut que tous les termes soient des intégrales. C'est le cas de f et de celle de droite, il reste à écrire x comme une intégrale entre x et $2x$.

   Autre possibilité : rassembler les deux intégrales d'un seul côté pour espérer faire apparaître en simplifiant une fonction dont on connaît la primitive afin de calculer et d'obtenir une expression sans intégrale (x).

   (b) Puisqu'il faut le déduire de la question précédente, il faut donc encadrer l'intégrale, et pour cela on doit obligatoirement commencer par encadrer l'intérieur.

   La minoration par 0 est a priori évidente.

   Puisqu'il faut un résultat en puissance de x, il est presque certain que la majoration s'obtiendra en se "débarrassant du dénominateur" en le minorant pour majorer 1/... et enfin multiplier par le numérateur et intégrer.

   (c) Il faut prouver que $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers 1, et les questions précédentes doivent obligatoirement faire penser à encadrer cette quantité.

   Attention, il est complètement faux d'obtenir un équivalent sur $x - f(x)$ puis d'essayer de retirer x ! On doit proprement transformer l'encadrement de 6.(b) pour encadrer $f(x)$, puis diviser par x, et chercher les limites des termes de gauche et droite pour essayer de conclure.

   (d) Plus difficile. Cela repose sur l'imparité de f. On doit chercher la limite de $f(x)/x$ en 0^-, et pour cela faire apparaître une quantité qui tend vers 0^+ : $-x$. On doit donc utiliser l'imparité "à l'envers" pour dire que $f(x) = -f(-x)$ et se servir de l'équivalent de 6c qui dit que $f(-x)/(-x)$ tend vers 1.

Exercice 3

1. Penser à identifier le bon terme prépondérant puis à factoriser par celui-ci.

2. Factoriser toutes les sommes par leur terme prépondérant (en commençant par l'intérieur du ln).

3. Attention à la rédaction : justifier la dérivabilité avant de dériver.

   Pour déterminer le signe d'une fonction, on la factorise au maximum et on utilise un tableau de signe, et on traite les facteurs "récalcitrants" par une étude de fonction (si nécessaire).

4. Évident.

5. Question ultra classique, qui doit être parfaitement maîtrisée.

6. Vous devez savoir (cf info première année) que, lorsqu'il n'y a pas d'étude de suite dans l'exercice, la seule méthode que vous connaissez pour trouver la valeur approchée de la solution α d'une équation du type $f(x) = 0$ est la **Méthode de dichotomie**.

   Ici, il faut donc que vous définissiez en Scilab la fonction $f(x) = \varphi(x) - 1$, que vous posiez $a = 1/3$ et $b = 1/2$ puis que vous répétiez l'opération ci-dessous, tant que $|b - a| > 10^{-2}$:

   - On pose c le milieu de $[a; b]$.

- Si f change de signe entre a et c (on sait alors que $\alpha \in [a;c]$) alors on prend l'intervalle $[a;c]$ comme nouvel intervalle $[a;b]$, sinon, on prend l'intervalle $[c;b]$ comme nouvel intervalle $[a;b]$.
- On affiche à la fin l'intervalle $[a;b]$, de longueur inférieure à 10^{-2},obtenu par dichotomie. On sait que α appartient à cet intervalle.

7. Une fonction f est une densité de probabilité si f est positive sur $\mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1.

   Attention à la convergence : on justifie proprement la convergence de chacune des intégrales mises en jeu.

8. X admet une espérance si $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ converge absolument. On a alors $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\ dt$.

   On demande ici une convergence d'intégrale sans sa valeur. Cela pointe vers les théorèmes de comparaison.

   Pour un théorème de comparaison, dans l'ordre : on regarde si les questions précédentes donne un équivalent, une négligeabilité ou une inégalité. Sinon, on détermine un équivalent le plus simple possible (valable pour convergence et divergence), puis si c'est insuffisant on cherche à prouver que la fonction est négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ (car ici on veut une convergence).

   Pour une divergence, on essaierait de regarder si $t \to \frac{1}{t}$ est négligeable devant la fonction (très peu usité).

9.
   - C'est un calcul assez simple; les deux côtés sont compliqués, on peut éventuellement simplifier les deux vers la même expression.
   - On calcule l'intégrale généralisée $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$. La question intermédiaire précédente permet de calculer l'intégrale, car les deux termes sont faciles à primitiver.
   - Penser à partir de l'encadrement de α obtenu dans la première partie.

10. On demande donc si $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt$ converge absolument. La variance X admettrait alors une variance grâce à Koenig-Huygens.

    On demande ici une convergence d'intégrale sans sa valeur. Cela pointe encore vers les théorèmes de comparaison.
