Indications - DM 13

A rendre le Mercredi 7 Février

Exercice 1

1. /

2. Pour obtenir la liberté d'une famille, on utilise un des deux cas particuliers s'il y a deux vecteurs ou moins, mais on résout obligatoirement un système s'il y a trois vecteurs ou plus.

3. /

4. A l'aide de la question précédente, on obtient les vecteurs propres **possibles** de A $(0, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

   On détermine les sous-espaces propres associés à chacune de ces valeurs : si le sous-espace propre est différent de $\{0\}$, c'est bien une valeur propre et on a obtenu le ou les vecteurs propres associés.

   On prouve ensuite qu'on a bien une base de vecteurs propres.

   Pour finir, on donne P et D (attention à l'ordre !).

5. Comme $\mathcal{E}$ est donné sous forme explicite, on prouve que $\mathcal{E}$ un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ en le mettant sous la forme d'un sous-espace vectoriel engendré.

   On obtient du même coup une famille génératrice et on montre que cette famille est libre. On a ainsi une base de $\mathcal{E}$ et sa dimension.

6. Comme $M \in \mathcal{E}$, on peut décomposer M dans la base (I, A, A^2). On peut alors exprimer le produit AM en fonction de A et de A^2 (avec la question 3) et obtenir le résultat.

7. La question précédente montre que f est à valeur dans $\mathcal{E}$.

   Il reste à montrer que f est linéaire en utilisant la caractérisation des applications linéaires.

8. Pour former F, on exprime $f(I)$, $f(A)$ et $f(A^2)$ dans la base (I, A, A^2).

9. Deux possibilités :

   - En utilisant la matrice F.
   - Directement en calculer $f \circ f \circ f(M)$.

10. Pour le noyaux, on passe par F pour le calcul puisque F est la matrice de f. On n'oublie pas ensuite de conclure sur f en écrivant les vecteurs dont la matrice dans la base (I, A, A^2) est dans le noyau de F.

    Pour l'image, rappelons que si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de E, $Im(f) = Vect(f(e_1), \dots, f(e_p))$.

11. Pour résoudre ces équations, on passe par F pour le calcul puisque F est la matrice de f. On n'oublie pas ensuite de conclure sur f en écrivant les vecteurs dans la base (I, A, A^2).

Exercice 2

1. (a) On passe par A pour le calcul puisque A est la matrice de f. On n'oublie pas ensuite de conclure sur f en écrivant les vecteurs dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est dans le noyau de A.

   (b) On utilisera la question précédente pour remarquer que f n'est pas bijective et conclure sur A.

2. (a) On demande LE vecteur donc il faut prouver que c'est le seul, et résoudre proprement l'équation matricielle associée puisqu'on connait A et non f.

   On fait les calculs sur les matrices, mais on n'oublie pas de conclure sur f en remettant les vecteurs en ligne.

   (b) Même méthode. Le résultat étant donné, il faut être particulièrement vigilant à l'énoncé de la question pour résoudre tout de même le système (sinon on ne prouve pas que c'est le seul).

   (c) Pour montrer qu'une famille est une base d'un espace vectoriel dont on connaît la dimension, on justifie que le cardinal de la famille est égal à la dimension de l'espace puis on prouve la liberté.

   Pour obtenir la liberté d'une famille, on utilise un des deux cas particuliers s'il y a deux vecteurs ou moins, mais on résout obligatoirement un système s'il y a trois vecteurs ou plus.

3. (a) Il faut déterminer les images par f de u, v et w en fonction de u, v et w. Très simple avec les questions précédentes.

   (b) A et N sont deux matrices d'une même application linéaire f donc il faut invoquer proprement la formule de changement de base.

   On calcule d'abord les puissances de N (matrice plus simple (réduite de A)), puis on prouve par récurrence une formule bien connue pour obtenir les puissances de A en fonction de celles de N.

4. (a) Écrire C_N avec des notations mathématiques. C_N est un ensemble défini sous forme implicite, on prouve que c'est un sous-espace avec la caractérisation des sous-espaces.

   Pour l'expliciter, il faut résoudre une équation matricielle d'inconnue N : on prend pour cela une matrice quelconque et on n'oublie pas que l'inconnue de départ est N pour arriver à conclure.

   (b) L'équivalence est une question ultra classique, dont on doit savoir qu'on peut la prouver par équivalence, sans revenir à une double implication.

   On écrit proprement au préalable le lien entre A et N dans les deux sens pour pouvoir l'utiliser.

   Ensuite, on explicite C_A en déterminant M à l'aide de $P^{-1}MP$ qui est connu grâce à la question 4.(a), donc on peut en déduire M.

   Pour donner la dimension d'une espace, on en donne une base.

   Pour obtenir une base d'un espace dont la dimension est inconnue, on justifie qu'une famille est génératrice puis on prouve sa liberté.

   Pour obtenir la liberté d'une famille, on utilise un des deux cas particuliers s'il y a deux vecteurs ou moins, mais on résout obligatoirement un système s'il y a trois vecteurs ou plus.

Exercice 3

1. (a) On cherche juste à démontrer la convergence d'une intégrale impropre en $+\infty$. Il suffit donc de faire un théorème de comparaison.

   (b) Faire une intégration par parties, en dérivant $t \mapsto t^n$ et en intégrant $t \mapsto e^{-t}$.

   (c) Il suffit de passer à la limite dans la relation obtenue à la question précédente.

   (d) On vérifie les trois points pour être une densité de probabilité : continue sauf peut-être en quelques points, positive, d'intégrale sur $\mathbb{R}$ égale à 1.

2. (a) On utilise la question 1.(c) en remarquant faisant apparaitre l'intégrale de f_{n+1} pour le calcul de l'espérance et l'intégrale de f_{n+2} pour le calcul du moment d'ordre 2.

(b) On connait déjà les propriétés des fonctions de répartition des variables à densité : les limites en $\pm\infty$, la croissance et le fait qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$, C^1 sauf en les points où la densité n'est pas continue. L'énoncé nous donne également des valeurs de certaines intégrales qu'on peut interpréter comme des valeurs de la fonction de répartition. On en déduit suffisamment d'éléments pour faire le tracé.

Pour la calcul des deux probabilités, on se ramène à la fonction de répartition et on utilise les valeurs données dans l'énoncé.

3. (a) C'est du cours...

(b) Il suffit de faire une phrase pour décrire chacun de ces deux événements. On constate alors qu'on a bien égalité.

(c) Utilise la question précédente puis exprimer le résultat avec une somme.

(d) Pour montrer que Z_n est à densité, on montre que sa fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sauf peut-être en quelques points.

On obtient ensuite une densité en dérivant la fonction de répartition partout où elle est dérivable. D'après l'énoncé, on devrait retrouver la densité f_{n-1}.
