Indications - DM 14

A rendre le Vendredi 16 Février

Exercice 1

1. Sans indication, on revient à la méthode habituelle avec $M_a - \lambda I$.
2. Évident.
3. Pour obtenir les racines d'un polynôme de degré 3, on détermine une racine α et on factorise le polynôme par $(x - \alpha)$.
4. En raisonnant par l'absurde, puisque M_1 a une seule valeur propre.
5. On connaît la dimension de E (justifier tout de même!), il faut donc prouver qu'il y a le bon nombre de vecteurs (évident) et qu'elle est libre. Pour cela, on écrit l'équation et on identifie les coefficients sur la base $\mathcal{B}$.
6. Évident.
7. Deux possibilités :
    - Première possibilité : On explicite $f_a(F)$ et on vérifie que $f_a(F) \subset F$. On a $F = Vect(e'_2, e'_3)$ donc $f_a(F) = Vect(f_a(e'_2), f_a(e'_3))$. On simplifie et on constate qu'on a bien l'inclusion demandée.
    - Deuxième possibilité : On revient à la définition d'une inclusion. On considère un élément $x \in F$ et on montre de $f_a(x) \in F$.
8. Évident.
9. Il suffit de savoir écrire une récurrence.
10. Ultra classique : partir du côté le plus compliqué (côté droit) et calculer.
11. Deux récurrences ultra classiques à faire en une seule; il suffit de savoir écrire une récurrence.
12. Attention, on demande P_2^{-1}, pas P_a^{-1}! Donner d'abord P_2 puis utiliser la méthode du pivot.

    Pour calculer u_n, il faut d'abord calculer le vecteur $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.
13. Évident. Attention à justifier pour la convergence d'une suite géométrique.
14. /

Exercice 2

1. Quelques rappels :
    - Pour montrer que c'est un espace vectoriel, il faut se demander s'il est sous la forme implicite ou explicite. S'il est sous la forme implicite, on utilise la caractérisation des sev, s'il est sous forme explicite, on l'écrit sous la forme Vect.
    - Pour la dimension, il faut une base. Pour une base, il faut une famille génératrice et libre, ou libre avec le bon nombre de vecteurs (mais ce bon nombre est la dimension, qui est inconnue).
    - Pour trouver une famille génératrice, on explicite la forme générale des matrices de l'espace puis on écrit cet espace sous la forme Vect(...).

- On teste ensuite la liberté de la famille génératrice obtenue : soit avec un des cas particuliers (un ou deux vecteurs) soir en revenant à la définition : résolution d'une équation.

2. (a) On prend un S quelconque de $\mathscr{S}_2$, ce que la question précédente permet de faire. On calcule ensuite $u(S)$ et on vérifie s'il est dans $\mathscr{S}_2$.
   (b) Pas de difficulté si la définition d'un endomorphisme est connue. Attention à bien prouver deux propriétés distinctes !
   (c) Trivial
   (d) Pas de difficulté si la définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base est connue. Si la décomposition sur la base n'est pas évidente, on résout un système pour l'obtenir.

3. Pour une base, il faut une famille génératrice et libre, ou libre avec le bon nombre de vecteurs si la dimension de l'espace vectoriel dont elle doit être une base est connue.

4. Idem question 2.(d) mais dans une autre base. Pas de difficulté si la définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base est connue.

   M et D sont deux matrices d'une même application linéaire u (dans des base différentes) donc c'est la formule de changement de base qui donne la relation entre ces matrices.

5. /

6. Trivial.

7. - On vient de diagonaliser M, il faut penser à l'utiliser !
   - M et D sont semblables, ce qui est vrai sur D est vrai sur M (mais il faut savoir le prouver).
   - Il faut donc commencer par prouver la même relation sur D.

8. - Quel est le lien entre u et M ?
   - Plus généralement, quand on veut prouver quelque chose sur une application linéaire et qu'on dispose d'une matrice de cette application, on le prouve sur la matrice pour l'obtenir sur l'application.
   - Reste à rédiger correctement l'obtention de la relation sur u : invoquer le théorème du cours "si deux applications linéaires ont même matrice dans une même base alors elles sont égales".

Exercice 3

1. Question de cours.

2. On reconnaîtra des intégrales usuelles faisant intervenir la densité d'une loi exponentielle : on donnera donc leur valeur sans faire de calcul intégral.

3. (a) Calculer la fonction de répartition de V : on résout l'inéquation $(-\ln(1-U) \geq x)$ en partant toujours de l'extérieur et en composant par la réciproque de la fonction usuelle que l'on rencontre... jusqu'à isoler U dans l'inéquation.

   A chaque étape, on se posera 2 questions : est-ce que j'ai le droit de composer par la fonction ? (domaine de déf) + est-ce que ça va changer le sens de l'inégalité ?
   (b) Utiliser la question précédent : simuler une variable de la forme $-\ln(1-U)$ où U est un nombre choisi au hasard dans le segment $[0, 1]$.

4. (a) Méthode usuelle de calcul de la loi du max.
   (b) On vérifie que la fonction de répartition est C^0 sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf...

   Puis on dérive la fonction de répartition pour avoir une densité.

5. (a) On ne demande pas la valeur de l'espérance! donc on applique un thm de comparaison.

(b) Là, on demande de calculer les intégrales !

6. (a) Méthode pour démontrer une égalité d'expressions : on calcul les 2 expression séparément et on montre qu'elles sont égales à une même troisième expression.
   (b) Il faut utiliser la question intermédiaire précédente, bien sûr !
   (c) Remarquer que si on développe l'intégrale de gauche de l'égalité précédente, on fait apparaître des espérances! Quant à l'intégrale de droite, elle est calculable.

7. Pour démontrer l'égalité de 2 évènements: on les traduit tous les 2 et on justifie qu'ils signifient la même chose.

8. On traduit l'évènement $N = n$, on disant ce qu'il s'est passé à chacune des épreuves! On traduira donc en faisant intervenir les variables $X_1, X_2, ..., X_n$.

9. On connait la loi de N : on reconnait une loi usuelle !

10. Il faut conditionner sur le système complet d'évènement $((N = 0), (N \neq 0))$.

    Dans la cas $(N \neq 0)$: Ne pas oublier ce que représente la variable N; du coup, vous connaissez des informations sur la variable X_N qui vous permettent de justifier que l'événement $(X_N \leq a)$ est forcément impossible.

11. (a) Faire 2 raisonnements séparés : le cas où $n = 1$ et le cas où $n = 2$.

    Dans les 2 cas : la méthode est la méthode de calcul d'une proba d'intersection (cf calcul de la loi d'un couple).

    Ici, les variables ne sont pas indépendantes, il n'y a pas que 2 épreuves successives, donc c'est forcément la dernière méthode : ON TRADUIT l'évènement $((N = n) \cap (Z \leq x)$ i.e. : on dit, en français , ce qu'il s'est passé à CHACUNE des épreuves : la première, la deuxième... etc, puis on l'écrit en maths : on traduit donc en faisant intervenir les variables $X_1, X_2, ..., X_n$, car chacune d'entre elle correspond à une seule épreuve.

    Enfin, Une fois qu'on a $X_1, X_2, ..., X_n$ ...on essaie de réécrire l'évènement en faisant intervenir T_{n-1} comme demandé.

    (b) C'est un calcul de loi marginale !

    On applique la formule des probas totales sur le SCE. de l'autre variable : celui de N.

12. (a) Conclure en donnant la fct de répartition de Z puis calculer la fonction de répartition de $Z - a$.
    (b) Les déduire à l'aide de celles de $Z - a$ (connues car loi usuelle).
