

Indications - DM 16

## A rendre le Vendredi 14 Mars

### Exercice 1

1. Pour calculer le rang d'une matrice, on fait le pivot de Gauss et on se ramène à une matrice échelonnée. Le rang est alors le nombre de pivots non nuls.  
Utiliser la caractérisation des valeurs propres et le théorème du rang ensuite.
2. On revient à la définition d'un vecteur propre (ne pas oublier de dire que  $U \neq 0$  !!).
3. (a) On connaît la dimension de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ . On montre donc la liberté de la famille et on vérifie qu'elle a le bon nombre de vecteurs.  
(b) Revenir à la définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base.  
(c) Utiliser la formule de changement de bases.
4. Comme  $A$  et  $B$  sont semblables, cela revient à se demander si  $B$  est inversible et si  $B$  est diagonalisable.
5. /
6. Il suffit de faire le produit.
7. On utilise la question précédente et la relation entre  $A$  et  $B$ .
8. (a) C'est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1...  
(b) C'est encore une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1...  
(c) On remplace et on constate que c'est bien solution particulière.  
Pour l'ensemble des solutions, on cherche les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 associée puis on ajoute la solution particulière.
9. Utiliser la question 7.
10. Utiliser les résultats de la question 8 pour obtenir  $Y$ . Attention : les constantes  $\lambda$  ne sont pas les mêmes pour  $(\mathcal{E}_1)$ ,  $(\mathcal{E}_2)$  et  $(\mathcal{E}_3)$ .  
Pour obtenir  $X$ , il reste ensuite à multiplier par  $P$ .
11. On détermine  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  avec les conditions initiales.
12. Tout dépend de la conjecture que vous avez faite !

### Exercice 2

1. Il faut se ramener à la définition d'une matrice diagonalisable :  $A = PDP^{-1}$ . Puis mettre au carré...
2. (a) /  
(b) D'après la question 2.(a),  $x^4 - 1$  est un polynôme annulateur de  $A$ . Il reste à trouver les racines en utilisant les identités remarquables.  
(c) Comme indiqué dans l'énoncé, il faut supposer que  $A$  est diagonalisable et donc  $A = PDP^{-1}$ . En connaissant les valeurs propres possibles de  $A$ , on peut calculer  $D^2$  puis  $A^2$  et aboutir à une contradiction.
3. (a) On détermine  $\text{Ker}(g - Id)$  directement ou en travaillant matriciellement avec  $\text{Ker}(A - I_3)$ . On en déduit une famille génératrice de  $\text{Ker}(g - Id)$  puis on justifie qu'elle est libre pour obtenir une base.

- (b) On travaille matriciellement en déterminant  $\text{Ker}(A^2 + I_3)$  (en résolvant le système linéaire associé). On en déduit une famille génératrice de  $\text{Ker}(g^2 + Id)$  puis on justifie qu'elle est libre pour obtenir une base.
- (c) On connaît la dimension de  $\mathbb{R}^3$  donc on justifie que la famille est libre (en résolvant un système car il y a plus de 2 vecteurs) et qu'elle a le bon nombre de vecteur.
- (d) On revient à la définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base.
- (e) Utiliser la formule de changement de base à l'endomorphisme  $g^2$  entre la base canonique et la base  $(u, v, w)$ . Puis en déduire que  $A^2$  est semblable à une matrice diagonale et conclure.

### Exercice 3

1. Formules de cours. Ne pas confondre densité et fonction de répartition.
2. La méthode donnée par l'énoncé est très claire, et bien connue : pour obtenir la probabilité d'un événement qui dépend de deux variables aléatoires, on utilise les probas totales; comme ici seule une des deux variables donne un SCE, on n'a pas le choix.  
Ensuite, on calcule les probabilités des intersections en se ramenant à  $X$  et  $Y$  qui sont indépendantes.
3. (a) /  
(b) On remplace donc  $F_X$  par  $\Phi$ , il faut alors connaître les propriétés de  $\Phi$ , et notamment  $\Phi(-x)$  en fonction de  $\Phi(x)$  pour simplifier et reconnaître une loi usuelle.
4. (a) /  
(b) Donner précisément l'expression en remplaçant  $x$  par  $-x$  partout et dans les 3 cas, puis en résolvant les inégalités sur  $-x$  pour les réécrire sur  $x$  et donner une expression utilisable.  
(c) Séparer en autant de cas que nécessaire pour effectuer le calcul (a priori, il y en a quatre).
5. (a) Comme lors des deux cas précédents, on commence par déterminer précisément  $F_X(-x)$  pour pouvoir faire le calcul avec autant de cas que nécessaire.  
(b) On le prouve proprement avec la fonction de répartition : classe  $C^1$  sauf en quelques points et continuité sur  $\mathbb{R}$ .  
Penser à utiliser l'expression de  $F_Z$  en fonction de  $F_X$  qui a les bonnes propriétés car  $X$  est à densité : cela évite tout calcul.  
(c) Attention à bien signaler qu'on ne dérive pas au(x) point(s) problématique(s) mais qu'on donne une valeur arbitraire positive.  
Il y a deux cas pour  $F_Z$  donc on fait deux cas pour la dérivée, et on vérifie qu'on obtient à chaque fois la valeur demandée.  
(d) On veut la valeur d'une intégrale généralisée (l'énoncé semble faire fi de la convergence) : on peut revenir à l'intégrale partielle ou utiliser une intégrale usuelle (moment d'une loi usuelle à densité).  
Ici on reconnaît une intégrale usuelle, ce qui permet de conclure beaucoup plus vite (l'intégrale partielle nécessite une IPP un peu lourde puis des limites très propres).  
(e) Pour la parité, on n'oublie pas de signaler que l'intervalle de définition est centré en 0.  
Ensuite on en déduit proprement la parité de la fonction considérée pour l'espérance, puis l'existence de  $E(Z)$  avec une convergence absolue, puis sa valeur.
6. (a) A nouveau, une intégrale usuelle permet de conclure beaucoup plus vite qu'avec le calcul de l'intégrale partielle.  
Par contre l'intégrale demandée n'est pas une variance mais un moment d'ordre deux, qu'il faut calculer en fonction d'une espérance et d'une variance connues avec le théorème de Koenig-Huygens utilisé "à l'envers".

- (b) Ne pas oublier de déterminer la parité de la nouvelle fonction intégrée pour se ramener sur  $\mathbb{R}_+$ , puis de justifier la convergence absolue avant de calculer la valeur du moment d'ordre deux.

On calcule ensuite la variance avec Koenig-Huygens.

7. (a) Le calcul est évident. Le résultat à retrouver est celui qui lie  $E(XY)$  à  $E(X)E(Y)$  dans un cas particulier (en effet dans le cours il n'est valable que pour des variables discrètes, et ici l'une des deux est à densité).
- (b) Revenir à la définition de  $Z$ , et remarquer que  $U^2$  est très très simple.
8. (a) Question classique mais difficile : on passe par la fonction de répartition, et on fait attention quand on compose par une fonction que la composition soit bien valable. Si la composition n'est pas possible pour certaines valeurs de  $x$ , penser à remarquer que l'évènement est certain ou impossible.
- (b) La variable est discrète,  $R(\Omega)$  est donc la première étape pour la loi. Ensuite on calcule deux probabilités a priori évidentes, en se ramenant à la variable  $U$ .
- (c) Question pas évidente : il faut d'abord simuler  $X$  et  $Y$  en se servant des question précédentes, puis  $Z$  a priori sans difficulté à partir de  $X$  et  $Y$ .
-