Indications - DM 17

A rendre le Vendredi 21 Mars

Exercice 1

1. (a) Comme l'urne ne contient que les boules 1, 2 et 3, il n'y a qu'une seule possibilité pour que $X_3 = 4$... Il faut ensuite exprimer cela avec les variables N_1, N_2 et N_3 et utiliser l'indépendance.

   (b) Pour $P(X_3 = 2)$, on décompose encore l'événement à l'aide des variables aléatoires N_1, N_2 et N_3, puis on calcule la probabilité.

   Pour $P(X_3 = 3)$, on utilise le SCE associé à X_3.

2. Comme on vient de déterminer la loi de X_3, on peut calculer son espérance...

3. Les tirages sont avec remise donc, à chaque tirage, on a la même probabilité d'avoir chacun des numéros. Donc...

4. On est ici dans la même situation qu'à la question 1.(a) avec n quelconque. On applique donc la même méthode.

5. Sachant $(N_1 = i)$, $(X_n = 2)$ si on tire un numéro supérieur ou égal à i. Comme c'est de l'équiprobabilité, on dénombre le nombre de cas favorables et le nombre total de cas.

6. Utiliser les probabilités totales avec le SCE $(N_1 = i)_{i\in[\![1,n]\!]}$.

7. Pour l'égalité entre les événements, il suffit de décrire par une phrase chacun d'eux et de constater que c'est la même chose.

   Pour en déduire $P(X_n > k)$, faire du dénombrement (difficile et peut-être admis).

8. Classique! Exprimer un des événements comme une réunion incompatible des deux autres. Puis passer aux probabilités.

9. Partir de la définition de l'espérance puis utiliser la question précédente. Il faut ensuite "ajuster" les somme pour obtenir l'égalité demandée.

   Pour le calcule de $E(X_n)$, on utilise la formule qu'on vient de démontrer et la question 7.

10. Utiliser les questions 7 et 8. Simplifier à l'aide de la formule explicite des coefficients binomiaux.

11. La variable k étant fixée, on passe à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'expression obtenue à la question 10. Pour cela, utiliser la formule explicite du coefficient binomial et prendre un équivalent.

12. C'est une série exponentielle...

13. On utilise la définition de l'espérance pour calculer $E(Z)$ (c'est encore une série exponentielle...).

Exercice 2

1. Formules de cours.

2. Il faut d'abord remarquer que $|X_1 - X_2| = 0 \Leftrightarrow X_1 - X_2 = \pm 0 = 0$.

   Ensuite, c'est la proba d'un évènement dépendant de deux variables aléatoires : on doit donc utiliser les probas totales avec le système complet de l'une des deux.

3. (a) C'est la proba d'un évènement dépendant de deux variables aléatoires : on doit donc utiliser les probas totales avec le système complet de l'une des deux.

   Ici l'énoncé donne le résultat à obtenir donc il faut analyser le résultat donné pour choisir le bon SCE parmi celui de X_1 et celui de X_2.

   (b) Le "en déduire" indique d'utiliser la question précédente : il faut donc décomposer l'évènement demandé à l'aide de celui de la question 3.(a) : en effet, $|X_1 - X_2| = n$ se traduit par $(X_1 - X_2 = n) \cup (X_1 - X_2 = -n)$.

4. (a) La linéarité, le produit indépendant, le transfert, ne peuvent pas s'appliquer ici : il ne reste que la définition de l'espérance. On veut l'existence et la valeur, il faut donc la convergence absolue et la valeur d'une série : on doit donc faire apparaître des séries usuelles ou bien télescoper.

   (b) Cette fois le résultat donné avec $V(X_1)$ indique de faire apparaître $E(X_1^2)$: on doit donc choisir la linéarité de l'espérance et le produit indépendant après avoir développé le carré.

5. Pour obtenir une égalité d'évènements, on explique avec une phrase précise pourquoi ils représentent la même situation.

6. (a) La question précédente écrit A avec deux variables aléatoires : on utilise donc les probas totales avec le SCE de l'une des deux. Comme en 3.(a), le résultat donné par l'énoncé doit permettre de choisir le bon parmi les deux SCE.

   (b) Il faut calculer $P(X_3 > k)$ puis la somme : pour calculer $P(X_3 > k)$ pour une variable <u>discrète</u>, il faut d'abord calculer $P(X_3 \leq k)$ en sommant les probabilités sur toutes les valeurs inférieures ou égale à k, puis passer à l'évènement contraire.

   Pour la somme de série, comme la valeur est demandée, il ne peut s'agir que d'une série usuelle à faire apparaître ou d'un télescopage.

7. /

8. Formules de cours.

9. (a) L'évènement dépend de deux variables aléatoires, une nouvelle fois on applique les probas totales. Attention, une variable à densité n'a pas de SCE associé : du coup le SCE à utiliser ne doit faire aucun doute (de nouveau, l'énoncé permet à nouveau de le repérer).

   (b) Il faut calculer la somme d'une série : à nouveau, les séries usuelles et le télescopage sont les seules possibilités connues.

   (c) Le seul moyen de trouver une densité, et le seul moyen de prouver qu'une variable est à densité, est de travailler avec la fonction de répartition. Il est donc obligatoire de la calculer en préalable.

   Attention, une fonction de répartition est toujours définie sur $\mathbb{R}$. Il ne faut donc pas oublier de donner la fonction de répartition de Z sur $]-\infty; 0[$ en réfléchissant aux valeurs prises prises par la variable Z.

   Ensuite une seule méthode existe pour montrer qu'une variable est à densité (régularité de la fonction de répartition) et pour déterminer une densité (dérivée de la fonction de répartition).

10. /

Exercice 3

1. Il faut toujours bien TOUT justifier : les variations, mais aussi chacune des limites (même simples).

2. Attention à LEVER LA TÊTE : utiliser les résultats de la question précédente pour répondre à cette question.

   Pour montrer que $\alpha \in]a, b[$, comme α est implicite (on ne connait pas sa valeur) mais que l'on connait $\varphi(\alpha)$, il faut d'abord comparer $\varphi(a)$, $\varphi(\alpha)$ et $\varphi(b)$ puis en déduire un encadrement de α (par stricte monotonie de φ^{-1}).

3. (u_n) est une suite récurrente donc on fait une récurrence.

4. On écrit $u_{n+1} - u_n$ uniquement en fonction de u_n et on cherche son signe (on fera encore attention à LEVER LA TÊTE, c'est-à-dire à utiliser un résultat de la partie I).

5. Méthode de suites récurrentes : on recherche les limites finies POSSIBLES, c'est-à-dire on suppose que (u_n) a une limite ℓ puis on passe à la limite dans l'égalité de récurrence et dans les inégalités et on résout pour en déduire un minimum de limites possibles aucune limite ou 1 seule limite). Il y a alors 2 cas :

   (a) soit il n'y a aucune limite finie possible alors par thm de la limite monotone on conclut que la limite est infinie.

   (b) soit il y a une limite finie possible, dans ce cas il faut prouver par thm de la limite monotone qu'elle converge; elle convergera alors forcément vers la seule limite possible.

6. On demande juste sa nature donc théorèmes de comparaison !

7. Découper S pour mettre $S - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)}$ sous forme d'une somme puis majorer cette somme par une somme que vous savez calculer (série géométrique ou exponentielle donc, pas beaucoup le choix!)

8. /

9. /

10. Il faut calculer la dérivée de g par rapport à x, notée $\partial_1 g(x, y)$, c'est-à-dire dériver en considérant x comme la variable et y comme une constante ; puis calculer la dérivée de g par rapport à y, notée $\partial_2 g(x, y)$, c'est-à-dire dériver en considérant y comme la variable et x comme une constante.

11. Les points critiques sont les solutions du système $\left\{ \begin{array}{lcl} \partial_1 g(x, y) & = & 0 \\ \partial_2 g(x, y) & = & 0 \end{array} \right.$

12. Calculer les dérivées partielles secondes $\partial^2_{1,1} g(x, y)$, $\partial^2_{1,2} g(x, y)$, $\partial^2_{2,2} g(x, y)$ puis donner la matrice hessienne $\begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(g) & \partial_{1,2}(g) \\ \partial_{1,2}(g) & \partial_{2,2}(g) \end{pmatrix}$ au point $(\alpha, 0)$:

    - si elle a deux valeurs propres strictement positives, alors g a un minimum local en $(\alpha, 0)$;
    - si elle a deux valeurs propres strictement négatives, alors g a un maximum local en $(\alpha, 0)$;
    - si elle sont de signe opposé, alors g n'a pas d'extremum local en $(\alpha, 0)$.

13. Idem : on calcule la matrice hessienne et on conclut.

14. Si g n'a pas d'extremum local, alors il n'y a pas d'extremum global (car un extremum global est forcément local).

    Si g a un extremum local, alors on vérifie si il est aussi global. D'abord, on vérifie si certaines valeurs ou limites prouvent que ce n'est pas le minimum de la fonction, sinon, on prouve que ça l'est en montrant que $\forall (x, y) \in U$, $g(x, y) \geq g(\alpha, 0)$.