Indications - DM 17

A rendre le Vendredi 31 Mars

Exercice 1

1. φ n'a pas de point problématique, la méthode et la résolution pour la classe C^3 sont évidentes. Il suffit ensuite de calculer proprement pour ne pas faire d'erreurs dans les dérivées.

2. Première partie : pour étudier un signe, on factorise au maximum puis on étudie le signe de chaque facteur séparément et on conclut avec un tableau de signe. S'il y a un facteur problématique, il faut poser une fonction et l'étudier.

   Pour le signe de φ'', avant de se jeter sur la méthode ci-dessus, on essaie de conclure avec les variations de φ''.

   Pour la dernière inégalité, avant de se jeter sur la méthode habituelle (tout ramener à gauche et factoriser) on essaie d'utiliser les variations de φ'.

3. Calcul de limites : on essaie de conclure par opérations élémentaires et croissances comparées, et si on a une indétermination :

   - On factorise au maximum (factorisations réelles), on simplifie et on réessaie.

   - Si cela ne suffit pas, on cherche un équivalent de chaque facteur problématique en factorisant les sommes par leurs termes prépondérants, on en déduit un équivalent de la fonction et on réessaie.

   - Si un facteur n'a pas de terme prépondérant, on en fait apparaître un à l'aide d'un DL.

4. Voir la méthode ci-dessus. Pour la 2e, on peut utiliser astucieusement la 1ère.

5. On ne connaît pas les variations de φ, et de toute manière l'expression à droite dépend de x : on doit donc obligatoirement tout passer à gauche avant de dériver et d'étudier la fonction.

6. Ne pas oublier la classe C^2 (il suffit ici de la citer puisqu'on a déjà la classe C^3) puis de déterminer complètement le signe de φ'' (il ne suffit pas que φ'' s'annule, il faut qu'elle change de signe).

   Attention, c'est un point de la courbe, il a une abscisse et une ordonnée.

   Pour obtenir l'équation de la tangente au point, il suffit d'appliquer une formule bien connue.

7. La question 2 donne le signe de φ' donc on peut conclure rapidement aux variations. Pour le calcul de limite, voir question 3.

   Ensuite on fait attention de respecter toutes les informations obtenues précédemment, et notamment que la courbe traverse la tangente au point d'inflexion.

8. /

9. Question inusitée mais pas très difficile ici. Il suffit de hachurer la partie du plan correspondante.

10. Méthode évidente.

11. Résoudre le système en se servant du résultat à obtenir pour guider la résolution : puisqu'on donne y en fonction de x, il faut substituer y (en choisissant la bonne équation) puis transformer l'autre équation pour faire apparaître $\varphi(x)$.

12. Finir la résolution, en se servant de la partie I pour obtenir la solution de $\varphi(x) = 0$: puisqu'on ne sait pas résoudre l'équation, on est obligé de conclure par une bijection continue puis en trouvant une solution évidente (trouvée dans la partie I).

13. On applique la méthode usuelle : calcul puis signe des valeur propres de la Hessienne.
14. Question de cours : les seuls extrema locaux possibles sont les points critiques !
15. Pour prouver une inégalité sur une suite récurrente, on fait une preuve par récurrence en se servant de l'étude de la fonction φ pour l'hérédité.
16. La croissance d'une suite monotone s'obtient soit par récurrence en comparant les deux premiers termes, soit avec le signe de $\varphi(x) - x$.

    On sélectionne la seconde méthode lorsque le premier terme de la suite est une constante inconnue ou lorsque le signe de $\varphi(x) - x$ a déjà été étudié. Sinon o utilise la première (c'est le cas ici).
17. Programme ultra classique.
18. On demande la nature mais pas la somme, on procède donc par théorème de comparaison. On cherche d'abord une inégalité obtenue grâce à l'énoncé (ici on en a une, question 14); sinon (inutile ici) on cherche un équivalent du terme général puis éventuellement à obtenir sa négligeabilité devant $\frac{1}{n^2}$ (impossible ici car on n'a pas d'expression explicite de la suite).
19. /

Exercice 2

1. (a) Évident.
   (b) Toujours penser à utiliser une matrice de f pour répondre aux questions sur f; ne pas oublier de conclure sur f après avoir répondu sur A.
   (c)
   - Idem : calculer f^2 toujours selon la même méthode.
   - Pour montrer une égalité d'ensembles définis comme des Vect(...), on transforme la base d'une des deux avec des pivots en colonnes pour arriver à la même expression que la base de l'autre.
   - On peut aussi utiliser la méthode plus générale : on prouve deux inclusions, et chaque inclusion s'obtient en prenant un élément quelconque du plus petit, et en montrant qu'il appartient aussi au plus grand.
2. (a) Question ultra classique : "la seule **possible**" est synonyme de "en utilisant un polynôme annulateur".
   (b) Question théorique très classique sur les matrices nilpotentes. Partir de $M^3 = 0$ et multiplier la relation par M^{-1}...
   (c) Nouvelle question théorique très classique sur les matrices ayant une unique valeur propre.
3. (a) Évident.
   (b) Question théorique, très classique à l'Essec, sur les endomorphismes nilpotents. Il faut prouver que la famille a le bon nombre de vecteurs (évident) est est libre. Avec trois vecteurs, on est obligé de résoudre un système, qu'on écrit. Ensuite on se débrouille pour transformer afin d'utiliser les deux seules informations sur g : $g^2(u) \neq 0$ et $g^3 = 0$.
   (c) Question évidente à condition de ne pas paniquer.
   (d) On utilise encore une matrice de g pour le calcul des trois espaces, on a le choix entre M et N, et le choix est vite fait... On n'oublie pas de conclure ensuite sur g (attention, la matrice utilisée n'est pas dans la base canonique...) .

Exercice 3

1. (a) Montrer que l'ensemble de définition de f est centré en 0 et que $f(-x) = f(x)$.

   (b) Comme on nous demande sa valeur, on coupe l'intégrale, on primitive, puis on passe à la limite. Pas de théorème de comparaison ici!
   (c) On montre les trois points. Et on utilise les deux questions précédentes pour montrer que l'intégrale vaut 1.

2. (a) On ne nous demande pas la valeur donc c'est un théorème de comparaison! L'intégrale est impropre en $+\infty$ et on compare avec une Riemann.
   (b) Il faut remarquer que $x \mapsto xf(x)$ est impaire! Donc l'intégrale sur $\mathbb{R}$ converge et vaut 0.

3. (a) On coupe et on fait une IPP (en dérivant x^2 et en intégrant l'exponentielle). Puis on passe à la limite.
   (b) On utilise encore la parité, cette fois de $x \mapsto x^2 f(x)$.

4. (a) Déterminer le support de Y pour déterminer les cas triviaux. Et pour les autres cas, ce ramener à la fonction de répartition de X.
   (b) On commence par justifier que Y est bien à densité (en justifiant que F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sauf en quelques points). Puis on dérive F_Y pour obtenir f_Y qui devrait être la densité de la loi exponentielle de paramètre λ.
   (c) On remarque que $E(X^2) = E(Y)$ qu'on connait d'après la question précédente. On en déduit $V(X)$ à l'aide de Koenig-Huygens.

5. (a) Question très classique. W suit une loi usuelle.
   (b) On utilise que $Y = X^2$ donc $|X| = \sqrt{Y}$. Et on sait simuler Y avec la question précédente.
   (c) On commence par vérifier que $P(X \geq 0) = P(X \leq 0)$.
   On a donc une chance sur deux que X soit négative ou positive ce qui permet de simuler X à partir de $|X|$.

6. (a) Le produit d'exponentielle est égal à l'exponentielle de la somme...
   (b) Simple étude de fonction. Attention, c'est λ la variable ici.

7. (a) On applique le théorème de transfert. On pourra démontrer que $\frac{n}{t} f_n(t) = \lambda \frac{n}{n-1} f_{n-1}(t)$ puis utiliser l'indication de l'énoncé.
   (b) Il faut prendre $Z'_n = \lambda_n Z_n$ avec un λ_n bien choisi pour compenser le coefficient $\frac{n}{n-1}$.
