Indications - DM 2

A rendre le Lundi 20 Septembre

Exercice 1

1. On justifie la continuité de f sur $\mathbb{R}_+^*$ en utilisant les théorèmes généraux : elle est continue comme somme, produit, quotient défini ou composée définie de fonctions continues.
   On étudie la continuité en 0 en revenant à la définition de la continuité : il faut que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

2. Pour savoir si la courbe a une tangente ou demi-tangente en un point x_0, il faut étudier la limite du taux d'accroissement de f en x_0 c'est-à-dire $\lim_{x\to x_0, x\neq x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$:

   - Si cette limite existe et est finie, alors f est dérivable en x_0, de dérivée x_0, et la courbe de f a une tangente de pente $f'(x_0)$;
   - Si cette limite est infinie, f n'est pas dérivable en x_0 mais sa courbe a une tangente verticale en x_0 (tangente de pente infinie).

3. Une fonction est convexe en un point x si $f''(x) \geq 0$ (conv**ex**e comme la fonction **ex**ponentielle) et elle est concave en ce point si $f''(x) \leq 0$ (concave comme logarithme).

   Quitte à tracer la courbe de la fonction exponentielle pour s'en souvenir, on retiendra qu'une fonction convexe est une fonction en dessous de ses cordes et au dessus de ses tangentes.

   De même, quitte à tracer la courbe de la fonction logarithme pour s'en souvenir, on retiendra qu'une fonction concave est une fonction au dessus de ses cordes et en dessous de ses tangentes.

   Pour étudier les variations d'une fonction, si le signe de la dérivée est impossible à obtenir (après avoir factorisé au maximum), il faut étudier les variations de f', pour pouvoir trouver son signe et obtenir enfin les variations de f !

4. Il faut utiliser le théorème de la bijection !

5. Pour étudier f^{-1}, il suffit d'échanger le rôle des x et des y dans le tableau de variation de f.

6. /

7. (a) Utiliser la bijectivité de f.
   (b) Écrire l'équation à résoudre.
   (c) Classer les images et revenir aux antécédents avec les variations de f.
   (d) On utilisera l'expression de x_k et x_{k+1} en fonction de f^{-1} ainsi que les variations de f^{-1} pour comparer x_k et x_{k+1} et obtenir que (x_k) est croissante.
   On utilisera l'expression de x_k en fonction de f^{-1} pour obtenir la limite de x_k.

8. (a) On étudie le signe de la dérivée en pensant à bien la factoriser !
   (b) Utiliser les variations de φ.
   (c) On montre que φ' est croissante sur $[\frac{3}{2}, 2]$ (en calculant φ'') puis on compose les inégalités $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$ par φ'.
   (d) Transformer l'équation $x = \varphi(x)$ jusqu'à obtenir l'équation $f(x) = 1$.
   (e) Faire une récurrence et utiliser la réponse à la question 8.(b).

(f) Pas de récurrence ici ! Une récurrence ne sert JAMAIS à trouver un lien entre le rang n et le rang $n+1$!

En revanche, c'est une question classique sur les suites récurrentes, qui utilise l'inégalité des accroissements finis !

Pour y répondre, il faut :

- Écrire l'inégalité des accroissements finis pour la fonction ϕ sur l'intervalle I contenant tous les termes de la suite (u_n) (en pensant à vérifier si les hypothèses sont bien vérifiées).
- On choisit alors $b = u_n$ et $a = x_1$ (en vérifiant qu'ils sont bien dans l'intervalle I choisi) et on écrit l'I.A.F. pour ces deux valeurs.
- On vérifie que l'inégalité obtenue est bien égale à l'inégalité demandée.

(g) Maintenant qu'on a une relation de récurrence entre le rang n et le rang $n+1$, on peut faire une récurrence pour prouver que la relation est vraie pour tout rang n !

(h) Passer à la limite dans l'inégalité précédente.

(i) Résoudre l'inégalité $\left(\frac{2}{9}\right)^n \leq 10^{-4}$.

(j) /

Exercice 2

1. Question ultra classique. Pour minorer (respectivement majorer) une intégrale, on commence par minorer (resp. majorer) la fonction à l'intérieur puis on intègre l'inégalité : si les bornes sont croissantes, l'intégration ne change pas le sens des inégalités.

2. Toujours très classique : pour obtenir une inégalité sur une somme, on somme des inégalités. Reste à trouver les bonnes bornes pour sommer ; attention, la formule précédente n'est pas valable pour toute valeur de k !

3. (a) Parfaitement défini signifie que l'opération pour calculer u_{n+1} est toujours possible.

   (b) On cherche le signe de $u_{n+1} - u_n$, ou on obtient une inégalité entre les deux par récurrence en prouvant au préalable que la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ est croissante.

4. (a) Remplacer u_{k+1} par sa valeur en fonction de u_k puis calculer.

   (b) Deux informations fondamentales : la somme dans le résultat cherché, et le $u_{k+1}^2 - u_k^2$ qui sent très fort le télescopage. Tout ceci converge à sommer les égalités du 2.(a) pour des valeurs de k à déterminer à l'aide du résultat de l'énoncé. On calcule ensuite les sommes des deux côtés sans grande difficulté.

   (c) On cherche une inégalité, on se ramène à un signe et on applique les méthodes habituelles. Ensuite cette inégalité permet clairement d'obtenir la limite de u_n^2, et on doit composer par une fonction bien choisie. Attention, $\sqrt{x^2}$ n'est pas égal à x !

5. (a) On se ramène à un signe, ce qui permet d'identifier le résultat à obtenir : une inégalité sur $\sum \frac{1}{u_k^2}$. On l'obtient donc en sommant les inégalités sur $\frac{1}{u_k^2}$ données par le 2.(c) puis en majorant encore pour faire apparaître le $\frac{1}{2}v_{n-1}$ (l'écrire sous forme de somme pour voir la majoration).

   (b) Évident.

   (c) On cherche donc la limite du quotient, qu'on va clairement chercher par encadrement; on utilise les deux inégalités précédentes qu'on pensera à transformer en deux inégalités sur u_n.

6. /

7. (a) /
   (b) On décompose 5000 en produit de puissances de 2 et 5 puis on utilise les propriétés algébriques du logarithme.
   (c) En utilisant l'encadrement de u_n^2 obtenu à la partie 2, on montre que $u_{4994} < 100$ (donc $n \geq 4995$) et que $u_{5000} > 100$ (donc $n \leq 5000$).

Exercice 3

1. (a) Faire une étude de fonction.
   (b) Deux problèmes à régler : le quotient et le ln.
2. (a) Très classique :
      - Sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ où la fonction a une seule définition, on utilise les opérations élémentaires.
      - En 0, on revient à la définition en montrant que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$. On a ici une forme indéterminée qu'il faut lever en factorisant par les termes prépondérants.
   (b) En un point particulier, on revient à la définition donc à une limite en 0 du taux d'accroissement.
3. (a) Sur un intervalle où la fonction a une seule définition, on utilise les opérations élémentaires pour le calcul de la dérivée.
   (b) Pensez à factoriser par les termes prépondérants.
   (c) $f'(x)$ est du signe de son numérateur.
4. Faire deux cas : si $x = 0$ et si $x > 0$
5. /
