Indications - DM 2

A rendre le Vendredi 27 Septembre

Exercice 1

1.

2.

3. Soit vous trouvez α et β de tête, soit vous résolvez cette équation d'inconnues α et β. Dans ce cas, vous avez un système linéaire à résoudre en identifiant coefficients par coefficients.

4. Utiliser la définition de l'inversibilité : une matrice A est inversible s'il existe une matrice B telle que $AB = I$ (on isole I dans un membre de l'égalité et on factorise par A dans l'autre membre).

5. On peut faire une récurrence sur les puissances car on connaît une relation de récurrence entre la puissance n et la puissance $n+1$: $A^{n+1} = A^n \times A$. On pensera à utiliser la question 2. au cours de la récurrence.

6.

7. (a) Trouver une relation de récurrence d'ordre 2 signifie trouver une relation entre trois termes consécutifs de la suite : α_{n+2}, α_{n+1} et α_n.
   Pour cela, il faut utiliser habilement l'une puis l'autre des 2 relations entre les suites (α_n) et (β_n) trouvées précédemment.
   On peut ensuite en déduire α_n en fonction de n car on sait trouver l'expression des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

   (b) Utiliser les relations de la question 5.

8. (a) **Attention** : La récurrence à permis de montrer que pour tout entier naturel n, on a $A^n = \alpha_n A + \beta_n I$, pas pour les entiers relatifs ! Il faut donc calculer $\alpha_{-1}A + \beta_{-1}I$ et vérifier que l'on obtient bien la matrice A^{-1} obtenue à la question 3.

   (b) On rappelle que la puissance négative d'une matrice n'a pas d'autre sens que comme étant la matrice inverse de la puissance positive associée. On sait donc, par définition, que $A^{-n} = (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$. Il y a deux méthodes possibles :
   - Soit on utilise $A^{-n} = (A^n)^{-1}$: Pour montrer que l'inverse de A^n est bien $\alpha_{-n}A + \beta_{-n}I$ en vérifiant que $(\alpha_{-n}A + \beta_{-n}I) \times A^n = I$.
   - Soit on utilise $A^{-n} = (A^{-1})^n$: on prouve l'égalité demandée par récurrence sur les puissances de la matrice A^{-1}.

Exercice 2

1. Suivre la définition : il y a quatre poins à prouver, tous extrêmement simples. A noter que :
   - Δ est diagonale donc diagonalisable: $\Delta = I\Delta I = I\Delta I^{-1}$.
   - Pour montrer que N est nilpotente, il faut commencer à calculer ses puissances successives.

2. (a) Il y a 2 produits matriciels à faire : $(A - I) \times (A - I)$ puis le résultats $\times(A - 2I)$. Bien sûr, il ne faut surtout pas développer, il y aurait beaucoup plus de calculs à faire.

   (b) Les valeurs propres possibles sont les racines du polynôme annulateur.
   Pour vérifier si 1 est valeur propre, on regarde si la matrice $A - I$ est inversible. De même, on vérifie si $A - 2I$ est inversible pour savoir si 2 est valeur propre de A.

   (c) Développer l'égalité sur les puissances de A obtenue à la question 2.(a) puis isoler l'identité à droite de l'égalité et enfin, factoriser par A.

3. On utilise la propriété : λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I$ n'est pas inversible (méthode du pivot).

4. (a) Rappel de cours : une famille libre à n vecteurs dans un espace de dimension n est une base de l'espace.
   (b) Vous êtes censés obtenir des vecteurs propres et des valeurs propres.
   (c) Rappel de cours : Une matrice M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est diagonalisable s'il existe une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M.
   Alors si on pose P la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres et D la matrice dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres associées, dans l'ordre, aux vecteurs propres précédents alors $M = PDP^{-1}$.
   (d) Multiplier correctement l'égalité par P et/ou P^{-1} à droite et/ou à gauche pour isoler D.
   (e) Sans indication, on procède par pivot de Gauss avec l'identité à côté pour calculer P^{-1}.
   N'oubliez pas de vérifier le résultat en calculant PP^{-1}.
   (f)

5. (a) Il suffit de calculer les puissances successives. Attention à bien respecter la définition de l'énoncé lorsqu'on conclut.
   (b) On vérifie proprement les quatre points (certains ont déjà été vus).
   (c) Il suffit de connaître la formule du binôme (attention à bien vérifier que les matrices commutent) et les puissances d'une matrice nilpotente pour simplifier la somme.
   (d) La propriété étant donnée, on procède par récurrence.
   (e) On commence par simplifier l'expression de A^n avec la question précédente. On peut alors facilement conjecturer la décomposition mais il faut de nouveau prouver proprement les quatre points. Par exemple, le fait que Δ^n soit diagonalisable n'a rien d'évident... Penser que Δ est diagonalisable, il faut toujours avoir le réflexe d'utiliser alors la forme diagonalisée pour travailler sur Δ.

Exercice 3

1. Prouver que f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans un ensemble J à déterminer et vérifier que n appartient bien à l'ensemble J.

2. On étudie une suite implicite. Il faut donc toujours :
   - commencer par comparer $f(x_n)$ et $f(x_{n+1})$ dont on connait la valeur,
   - puis en déduire une comparaison entre x_n et x_{n+1}, en revenant aux antécédents.

3. Pour démontrer une inégalité entre des fonctions (du type $g(x) \leq h(x)$ ou $g(x) \geq h(x)$) :
   - On peut raisonner par construction si ce n'est pas trop compliqué. Il faut alors bien justifier les comparaisons dues à des compositions par des fonctions croissantes ou décroissantes.
   - Sinon (plus simple), on étudie le signe de la différence $g(x) - h(x)$ en la factorisant au maximum, puis en étudiant séparément le signe de chacun des facteurs et enfin en concluant par un tableau de signe. Si jamais l'un des facteur $k(x)$ a un signe trop compliqué à étudier, on peut étudier les variations de la fonction k pour en déduire son signe.

4. On compare $f(n/2)$, $f(x_n)$ et $f(n)$ dont on peut calculer la valeur, puis en déduire une comparaison entre $n/2$, x_n et n en revenant aux antécédents.

5. Théorème d'encadrement.

6. Il faut commencer par utiliser l'encadrement de la question 4. pour encadrer $\frac{\ln(x_n)}{n}$.

   Puis, pour trouver un équivalent de x_n, il faut utiliser l'égalité $f(x_n) = n$ et expliciter f pour faire apparaître $\ln(x_n)$ et x_n.

7. Comme toujours, utiliser les égalités connues sur $f(x_n)$ et $f(x_{n+1})$ pour calculer $x_{n+1} - x_n$. On utilise après la question précédente pour trouver la limite.

8. (a) Utiliser encore l'égalité $f(x_n) = n$.

   (b) Simple. Passer à la limite dans l'égalité précédente.

   (c) Passer à l'équivalent dans l'égalité précédente. Comme $\dfrac{x_n}{n}$ tend vers 1, $\dfrac{x_n}{n} - 1$ tend vers 0. Alors $\ln(\dfrac{x_n}{n}) = \ln(1 + (\dfrac{x_n}{n} - 1))$ et on utilise l'équivalent usuel du cours.

9. On revient à la définition de l'équivalent pour faire apparaître un "petit o": $1 - u_n \sim 1/n$ donc $1 - u_n = 1/n + o(1/n)$. On isole ensuite x_n dans cette égalité.

10.