Indications - DM 3

A rendre le Mercredi 9 Octobre

Exercice 1

I. Puissances successives d'une matrice.

1. Pour montrer une égalité, on part du côté pour lequel il y a un calcul à faire, pour aller au plus simple. Ici, il suffit de calculer le produit $M(a)M(b)$.

2. Il y a une astuce ici qui consiste à utiliser la question précédente (astuce à retenir, c'est toujours la même pour ce type de question). Remarquez d'abord que $M(0) = I$. On va donc utiliser la question précédente, en vérifiant s'il n'y a pas une matrice de la forme $M(b)$ telle que $M(a)M(b) = I$.

   On résout donc l'équation $M(a)M(b) = M(0) \Leftrightarrow M(a+b-3ab) = M(0) \Leftrightarrow a+b-3ab = 0$, d'inconnue b.

   Vous trouverez alors l'inverse de $M(a)$, qui sera sous la même forme $M(b)$ pour tout $a \neq 1/3$.

   Il restera alors à étudier le cas particulier $a = 1/3$ en explicitant la matrice $M(1/3)$: elle sera clairement non inversible.

3. Utiliser la question 1 qui vous permet de calculer $M(a_0)^2$.

4. (a) On résout cette équation d'inconnue α. Une équation matricielle se traduit en système linéaire. Attention, α doit satisfaire à toutes les équations, pas une seule !

   (b) Produits matriciels sans difficulté.

   (c) On prouve par récurrence que $M(a)^n = a_nP + b_nQ$, et on obtient au passage une relation de récurrence sur les coefficients a_n et b_n.

   (d) On explicite a_n et b_n en reconnaissant des suites usuelles.

5.

II. Évolution d'un titre boursier au cours du temps.

1. (a) Il faut poser une suite vectorielle $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$ et montrer que le système précédent s'écrit sous forme matriciel de la forme $X_{n+1} = AX_n$, où A est une matrice à déterminer. Puis on obtient X_n en fonction de A et X_1 (ne pas parler de suite géométrique sur des vecteurs mais faire une récurrence pour donner X_n en fonction de X_1).

   (b) Ne pas oublier de justifier que $|q| < 1$ pour la limite d'une suite géométrique.

2. (a) On reconnaît une chaîne de Markov. Pour obtenir les probabilités de l'état à l'instant $n+1$ en fonction de celui à l'instant n, on utilise les probabilités totales avec le système complet d'évènement de l'instant n.

   (b) On retrouve la forme de la question II.1. Plutôt que de refaire la même chose, penser à utiliser directement les résultats de la partie 1. avec une valeur particulière de a bien choisie.

   (c) Même remarque qu'au 1.(b).

Exercice 2

1. (a) Les racines d'un polynôme annulateur sont les valeurs propres **possibles** de la matrice. Il faut ensuite utiliser la caractérisation des valeurs propres ($\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$ si et seulement si $B - \lambda I_3$ non inversible) pour déterminer si les racines sont bien valeurs propres.
   (b) Il faut résoudre le système $(B - \lambda I_3)X = 0$...
   (c) Par concaténation des bases des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes, on montre qu'il existe une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vecteurs propres de B.

2. (a) On revient à la définition d'un vecteur propre associé à une valeur propre λ : il faut que $AV = \lambda V$ et que $V \neq 0$.
   (b) On a démontré que (V_1, V_2, V_3) est une base de vecteurs propres de A. On peut donc conclure avec la CNS de diagonalisabilité.

3. (a) Comme on nous donne P^{-1}, il suffit de faire le produit avec P pour vérifier que c'est bien l'inverse de P.
   (b) En partant de la relation sur les X_n et en multipliant correctement par P^{-1}.
   (c) Il suffit de faire le calcul matriciel donné à la question précédente.
   (d) Les trois suites (a_n), (b_n) et (c_n) sont usuelles et on sait (normalement !!!) les mettre sous forme explicite.
   (e) Il suffit de passer de Y_n à X_n en multipliant correctement par la matrice P.

4. /

Exercice 3

1. Evident.

2. (a) Il faut sortir du produit de u_{n+1} le $(n+1)$-ième terme du produit.
   (b) (u_n) est croissante et $u_0 = 2$... Sinon, par récurrence.
   (c) Faire une étude d'un fonction.
   (d) Transformer $\ln(u_n)$ jusqu'à faire apparaître la forme $\ln(1+x)$ et utiliser la question précédente.

3. Penser au théorème des suites monotones !!

4.

5. (a) Attention, la notion de produit infini $\prod_{k=0}^{+\infty}$ n'a jamais été définie dans le cours d'ECE, on ne peut donc pas écrire ℓ sous cette forme ! Il faut donc passer au ln pour transformer en une somme avant de prendre la limite.
   (b) Se ramener aux expressions de $\ln(\ell)$ et $\ln(u_n)$ sous forme de sommes.
   (c) Démontrer séparément les deux inégalités. On utilisera la question 2.(c) pour la deuxième.
   (d) Pas évident. Séparer en deux inégalités. La première est simple. Pour la deuxième, faire la différence des deux membres et utiliser la question précédente pour obtenir le signe de la différence.
   (e) La première question est évidente (poser une fonction).
   La deuxième est assez évidente également (appliquer la question précédente).
   Enfin pour obtenir la nature mais pas la somme, on utilise un théorème de comparaison avec l'inégalité donnée par l'énoncé. On n'oublie pas de justifier que les termes généraux des deux séries sont de signes constants, au moins au voisinage de l'infini, avant d'utiliser le théorème.
