Indications - DM 4

A rendre le Vendredi 18 Octobre

Exercice 1

1.

2.

3. On commence par décomposer les événements $(X = 1)$, $(X = 2)$ et $(X = 3)$ à l'aide des événements N_i et B_i puis on passe aux probabilités et on applique les formules du cours (ici les probabilités composées).

4. On commence par donner le support de X. Puis, pour calculer $P(X = k)$, on généralise les calculs de la question précédente. On décompose $(X = k)$ à l'aide des événements N_i et B_i puis on passe aux probabilités et on applique la formule des probabilités composées. Le produit obtenu est télescopique et se simplifie. X suit une loi usuelle à reconnaitre.

5. On nous demande le nombre moyen de tirages nécessaires, c'est-à-dire l'espérance de X. Il suffit d'appliquer les formules du cours car X suit une loi usuelle.

6. Comme on cherche la probabilité sachant C_1, on tire dans l'urne 1 comme dans la première partie de l'exercice.

7. On sera certain de faire des tirages dans U_2 uniquement si on effectue N tirages et si on a obtenu que des blanches. Si $j = N$, l'événement est donc certain et si $1 \leq j \leq N - 1$, l'événement est impossible.

8. On applique la formule des probabilités totales avec les systèmes complets d'événements (C_1, C_2).

9. On dispose de la loi de Y avec la question précédente. Il suffit donc de calculer l'espérance en revenant sa définition.

10. Il faut réfléchir à la plus petite et la plus grande valeur possible pour T, puis voir si toutes les valeurs entre ces deux valeurs extrêmes sont atteintes par T.

11. On décompose l'événement $(T = k)$ à l'aide des événements N_i et B_i (soit on fait que des blanches puis une noires, soit on fait que des noires puis une blanches...) puis on passe aux probabilités et on utilise les formules/méthodes du cours pour le calcul.

12. Il faut montrer que la série $\sum_{k \geq 2} P(T = k)$ converge absolument et calculer la somme de la série.

    Il faut reconnaitre ici des séries géométriques dérivées d'ordre 1.

13. (a) On décompose l'événement $(U = 1) \cap (T = 2)$ à l'aide des événements N_i et B_i puis on calcule sa probabilité.

    (b) Même méthode qu'à la question précédente.

14. (a) Même méthode qu'à la question 13.

    (b) Il faut justifier que l'événement est impossible.

15. Pour calculer $P(U = 1)$, on utilise les probabilités totales avec le système complet d'évènements $(T = k)_{k \geq 2}$ puis la question 13 (en séparant le cas $k = 2$).

    Pour calculer $P(U = j)$ pour $j \geq 2$, on utilise la question 14.

Exercice 2

1. Il faut déterminer le support de X_2 puis les probabilités associées aux points du support de X_2. Pour cela, on traduit et on décompose les évènements à l'aide des événements P_k et F_k. On transforme d'abord la probabilité des unions en sommes en vérifiant et justifiant que les évènements sont 2 à 2 incompatibles puis on transforme les probabilités des intersections par formule des probabilités composées.

2. (a) Même chose que pour X_2.

   (b) Grâce à la loi de X_3, on peut alors calculer $E(X_3)$ (à partir de la définition de l'espérance) et $V(X_3)$ (avec Koenig-Huygens).

3. (a) Idem que précédemment.

   (b) Idem que précédemment.

4. Idem.Traduire et décomposer correctement l'évènement $(X_n = 0)$.

5. Idem. On tombe sur une somme de la forme $\sum_{k=1}^{n-1} p^k q^{n-k}$: sortir q^n de la somme car il ne dépend pas de l'indice k puis faire apparaître la somme des termes d'une suite géométrique de raison $x = \frac{p}{q}$. On rappelle que :
$$\sum_{k=p}^{n} x^k = x^p \times \frac{1 - x^{n-p+1}}{1 - x}.$$

6. Traduction d'évènements comme d'habitude ! Si n est impair, il y aura un événement P_{2k+1} ou F_{2k+1} à ne pas oublier à la fin!

7. Utiliser la linéarité de l'espérance pour exprimer $E(X_n)$ en fonction des $E(Z_k)$.

8.

9.

10.
