Indications - DM 6

A rendre le Vendredi 15 Novembre

Exercice 1

1. (a) Aucune difficulté.
   (b) Il faut étudier la fonction $g(x) = x - f(x)$.
2. (a) /
   (b) Par récurrence.
   (c) Utiliser la question 1.(b).
   (d) TSM + passage à la limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
3. (a) La série est télescopique donc on explicite la n-ième somme partielle de la série puis on passe à la limite.
   (b) On commence par remplacer u_{n+1} avec la formule de récurrence. Il faut ensuite faire le DL de e^{-u_n}. Il reste à simplifier puis obtenir l'équivalent demandé.
   (c) Il faut appliquer le théorème de comparaison des séries à termes positifs.
   (d) /

Exercice 2

1. Il faut justifier que f est continue sur $]-\infty, 0[$ et $]0, 1$ par opérations sur des fonctions continues.
   En 0, on montre que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ (utiliser un équivalent).
2. (a) C'est du cours !
   (b) On considère le taux d'accroissement de f en 0. Pour obtenir la limite, on utilise le DL précédent au numérateur et au dénominateur. On doit obtenir une limite finie égale à $\dfrac{1}{2}$ d'après l'énoncé.
3. (a) On justifie que f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; 1[$ par opérations sur les fonctions dérivables.
   Puis on calcule et on simplifie f'. Vous devriez trouver $f'(x) = \dfrac{-(\ln(1-x)+x)}{((1-x)\ln(1-x))^2}$.
   (b) Il faut étudier la fonction $g(x) = \ln(1-x) + x$ sur $]-\infty; 1[$.
   (c) En $-\infty$, factoriser par le terme prépondérant de $(1-x)$ en bas puis simplifier.
   En 1, on pose $X = 1 - x$ pour faire apparaitre une croissance comparée.
4. (a) Classique : on utilise le théorème de la bijection.
   (b) Rappelons que $f(u_n) = n \Leftrightarrow u_n = f^{-1}(n)$ où f^{-1} est la bijection réciproque de f sur $[0; 1[$.
   On utilise alors les propriétés de f^{-1} pour obtenir les résultats demandés sur la suite (u_n).

Exercice 3

1. Rappelons que pour calculer une probabilité on doit :
   - Décomposer l'événement dont on cherche la probabilité en français (dans sa tête ou au brouillon) en utilisant les évènements élémentaires.
   - Traduire cette décomposition en mathématique avec des intersections pour les épreuves successives, et des unions pour les différents cas.

- Utiliser l'incompatibilité (qui doit toujours être signalée !) pour les unions.
- Pour les intersections, on utilise l'indépendance (en la signalant !) si il y a bien indépendance. Sinon, on utilise les probabilités composées.

2. (a) Idem.

   (b) Idem.

   (c) Écrire la somme obtenue avec le symbole $\sum$ et calculer la somme.

   (d) L'évènement $X = 0$ est compliqué à traduire ("jamais" est toujours difficile à traduire). Lorsqu'il ne reste qu'une seule valeur de X dont on doit calculer la probabilité, on utilise le fait que les valeurs de X forment un SCE pour trouver la dernière valeur.

   Ou dit autrement : on calcule la proba de l'évènement contraire pour en déduire cette proba.

3. (a) Pas de maths ici : il s'agit de bien comprendre l'énoncé puis d'expliquer ce que demande l'énoncé.

   (b) La question précédente vous a fait trouvé un évènement conditionnel à l'évènement P_1 ("si le premier lancer est un plie"), elle vous invite donc à utiliser le SCE des résultats du premier lancer $\{P_1; F_1\}$.

   (c) Pour prouver qu'une suite est arithmétique, on essaie d'écrire u_{n+1} en fonction de u_n pour faire apparaître $u_{n+1} = u_n + r$, où r est une constante à déterminer.

   Quand une suite est arithmétique, on sait écrire son terme général en fonction de u_0 et de n, ou bien de u_1 et de n, ou bien...

4. Il faut écrire la formule de l'espérance, puis mettre en oeuvre le calcul de la somme (attention, on a à faire à une somme infinie ici, c'est-à-dire à une série).

5.

Exercice 4

1. Pour le calcul de proba, se ramener aux seules probabilités connues dans l'énoncé.

   Pour prouver un encadrement, on sépare en deux inégalités. Regarder les rares informations données par l'énoncé...

2. Quelle hypothèse de l'énoncé semble se rapprocher de ce résultat ?

   On rappelle au passage que la définition de $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

3. Pour tout n de N on pose $u_n = P(X \geq n)$.

   (a) On veut une relation entre u_{n+1} et u_n : quel est le rapport avec la question 2 ?

   (b) C'est une suite géométrique donc vous connaissez l'expression de u_n en fonction de u_0 par exemple.

   (c) Résultat très classique. Il vaut mieux transformer l'égalité comme une proba égale à la somme de 2 probas. On sait que ce type d'égalité s'obtient en décomposant un évènement comme union d'évènements 2 à 2 disjoints.

   (d) Evident.

4. (a) Calculer la loi et reconnaître une loi usuelle.

   (b) Attention, elles n'ont pas de raison d'être les mêmes que pour X ! Appliquer proprement les propriétés de l'espérance et de la variance.

5. (a) Le quotient doit faire penser à la définition de la probabilité conditionnelle. Il faudra alors travailler sur l'intersection.
   (b) On remplace λ_n par sa valeur et on simplifie.
   (c) Penser à séparer l'encadrement en deux inégalités, et à tout passer d'un côté pour se ramener à chaque fois à un signe.
   (d) Écrire le raisonnement par récurrence, et chercher un résultat précédent où il est question d'une forme $1 - \lambda$....
6. (a) Partir du côté plus compliqué (sur lequel on peut faire des calculs); a priori c'est celui de $P(.. \geq ..)$ et pas celui de la somme...
   (b) On cherche la limite d'une quantité, on isole cette quantité et on prend la limite !
   (c) Pas évident; remarquer que la quantité considérée est le ln d'une quantité rencontrée plus tôt...
7. Revenir à l'une des expressions précédentes du taux de panne; la loi de X étant connue, on peut calculer les probabilités cherchées.
8. (a) Pas évident : séparer l'encadrement en deux inégalités et utiliser des propriétés précédentes du taux de panne; la grande difficulté est de savoir quelles propriétés précédentes sont générales (et donc encore valables : ce sont celles de la partie II) et lesquelles étaient des cas particuliers (et ne sont plus valables : ce sont celles de la partie I).
   (b) Idem : trouver un résultat de la partie II qui permet de le calculer en fonction de ce qu'on connaît déjà.
   (c) On veut donc passer de $P(Z \geq ...)$ à $P(Z = ...)$: la méthode est classique et a déjà été vue plus tôt dans le problème.
