Indications - DM 7

A rendre le Mercredi 27 Novembre

Exercice 1

1. (a) On revient à la définition de la continuité en un point, et on n'oublie pas les méthodes de calcul de limite en 0 : factorisation au maximum, puis si besoin factorisation des sommes par leur termes prépondérants, puis si besoin recours aux DL.

   Avant chacune de ces étapes on vérifie bien sûr si on ne peut pas conclure directement par opérations sur les limites!

   (b) On revient également à la définition de la dérivabilité en un point avec la même méthode de calcul de limite.

2. (a) Penser à bien factoriser $f_n'(x)$ pour obtenir son signe.

   (b) Les limites en $\pm\infty$ ne posent aucun problème.

   En 0^-, on a une forme indéterminée avec un produit d'exponentielle, qui se règle en croissances comparées. Pour cela il faut poser $X = \frac{1}{x}$ pour faire apparaître une "vraie" croissance comparée.

3. (a) C'est du cours...

   (b) Utiliser le DL précédent pour la bonne fonction u tendant vers 0 (pas très difficile à idetifier...).

   (c) Rappelons qu'une asymptote au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) est une droite d'équation $y = ax+b$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)-(ax+b) = 0$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)-(ax+b) = 0$). La courbe de f_n "tend" alors vers son asymptote lorsque x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

   Pour la position de la courbe, on étudie le signe de $f(x) - (ax + b)$ au voisinage de $\pm\infty$. Attention, la position n'a aucune raison d'être la même des deux côtés : il faut bien faire les deux calculs. Pour obtenir un signe "au voisinage de", il faut trouver un équivalent simple et chercher le signe de cet équivalent.

   (d) Ne rien oublier pour le tracé : asymptote et position de la courbe, point(s) particulier(s) vus précédemment, variations correctes, etc...

4. (a) Question ultra classique : on utilise le théorème de bijection.

   (b) (u_n) est une suite implicite : toute inégalité s'obtient en comparant les images par f_n des deux valeurs à comparer.

   Pour montrer que $u_n \ln(u_n) = n$, on revient à la définition de u_n : $u_n e^{-\frac{n}{u_n}} = 1$.

   (c) Il faut justifier que g^{-1} existe en prouvant que g est bijective. On peut maintenant définir u_n sous une seconde forme : $g(u_n) = n \Leftrightarrow u_n = g^{-1}(n)$. Les limites de g^{-1} s'obtiennent par lecture inverse du tableau de variation de g.

   (d) On part de la relation $u_n \ln(u_n) = n$. Une fois la relation obtenue, la recherche d'équivalent de $\ln(u_n)$ se fait en factorisant la somme $\ln(u_n) + \ln(\ln(u_n))$ par le terme prépondérant.

   Gros piège ensuite : on ne peut pas composer les équivalents ! Pour obtenir un équivalent de u_n, on utilise de nouveau la relation $u_n \ln(u_n) = n$.

5. (a) On utilise la seconde définition de (u_n) (avec la fonction g). On compare u_n et u_{n+1} en les composant par g (ce qui est beaucoup plus simple, mais on n'a pas toujours le luxe d'avoir deux définitions différentes de la suite implicite...).

   (b) Il faut se débrouiller pour faire apparaître $f_{n+1}(u_{n+1})$ que l'on connaît.

6. (a) Par construction : on minore ou majore à l'intérieur de l'intégrale puis on intègre l'inégalité avec des bornes croissantes ou décroissantes (à déterminer précisément!). Il reste enfin à diviser l'inégalité obtenue par $u_{n+1} - u_n$.

(b) Faire un théorème d'encadrement.

(c) On demande la nature uniquement, on passe par un théorème de comparaison (ici un équivalent). On n'oublie pas de justifier que les séries sont à termes positifs. La série de l'équivalent est télescopique et il est donc facile de déterminer sa nature.

Exercice 2

1. Rappelons que pour calculer une probabilité on doit :
   - Décomposer l'événement dont on cherche la probabilité en français (dans sa tête ou au brouillon) en utilisant les évènements élémentaires.
   - Traduire cette décomposition en mathématique avec des intersections pour les épreuves successives, et des unions pour les différents cas.
   - Utiliser l'incompatibilité (qui doit toujours être signalée !) pour les unions.
   - Pour les intersections, on utilise l'indépendance (en la signalant !) si il y a bien indépendance. Sinon, on utilise les probabilités composées.
2. On réécrit l'événement U_n à l'aide de la variable X et on suit les indications de la question 1.
3. /
4. (a) On reconnait la formule du cours donc il faut décomposer U_{n+1} à l'aide de U_n et de B_{n+1} en justifiant.

   (b) Décomposer l'événement $U_n \cap B_{n+1}$ sur le SCE (P_{n-1}, F_{n-1}).

   (c) Passer aux probas dans la relation précédente puis utiliser la question 4.(a).
5. Utiliser la question précédente pour démontrer la croissance de la suite. On prouve ensuite la convergence avec le théorème des suites monotones. Et on passe à la limite dans la relation de récurrence de la question précédente pour obtenir la limite.
6. Utiliser le théorème de la limite monotone après avoir remarqué que la suite d'événements (U_n) est croissante.
7. Utiliser la question 4.(c).
8. Justifier que $U_{n+1} = (X = n+1) \cup U_n$ et puis passer aux probas et utiliser (encore !) la question 4.(c) et la question précédente.
9. Pour l'initialisation, il faut commencer par calculer v_2, v_3 et v_4.

   Pour l'hérédité, utiliser la question 8.
10. La majoration est évidente car la suite (v_n) est à termes positifs. Pour la croissance de (S_n), faire $S_{n+1} - S_n$ (comme d'habitude !).
11. La question précédente nous guide sur le théorème des suites monotones. Et (S_n) est la suite des sommes partielles de la série associée à l'espérance de X.
12. (a) Utiliser la question 9 et isoler le terme nv_n puis utiliser les résultats déjà démontrés.

    (b) Si $\lambda \neq 0$, on a alors un équivalent de v_n avec la question précédente. On utilise ensuite un critère de comparaison sur les séries à termes positifs pour prouver que $\sum v_n$ diverge.

    Avec la question 7, on montre d'autre part que $\sum v_n$ converge à l'aide d'un télescopage. D'où une contradiction.

    (c) Avec les deux questions précédentes, on en déduit donc la limite de nv_n. Puis on obtient celle de S_n avec la question 9. Ceci nous donne la valeur de $E(X)$.

Exercice 3

1. (a) Il suffit de bien lire l'énoncé...
   (b) On applique la formule/méthode des probabilités totales trois fois sur les SCE $((X_n = 1), (X_n = 2), (X_n = 3))$.
   (c) On peut par exemple partir du produit $U_n M$ puis appliquer les formules obtenues à la question précédente.
   (d) On suit la méthode vue en cours.
   (e) /
   (f) /
2. (a) /
   (b) Par identification.
   (c) Reconnaître les valeurs des produits $U_n L$ et $U_n J$.
   (d) On pose $u_n = E(X_n)$. Alors (u_n) est une suite usuelle qu'on peut expliciter.
3. /
