Indications - DM 8

A rendre le Mercredi 13 Décembre

Exercice 1

1. Montrer que les lignes ou les colonnes de la matrice ne sont pas linéairement indépendantes.

2. En l'absence de suggestion des valeurs propres ou des vecteurs propres de A, et en l'absence de suggestion d'un polynôme annulateur de A, on est obligés de revenir à $A - \lambda I$ et faire le pivot de Gauss.

3. On résout pour chaque valeur de λ obtenue précédemment l'équation

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow (A - \lambda I)X = 0 \Leftrightarrow T_\lambda X = 0,$$

   où T_λ est la réduite obtenue à la question précédente (plus simple car déjà triangulaire).

4. Comme on connait la dimension de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on vérifie que $card(\mathscr{B}) = dim(E)$ et on justifie que la famille $\mathscr{B}$ est libre (par concaténation des bases).

5. Rappelons qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si et seulement si il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

   Alors, par définition d'une matrice diagonalisable, A s'écrira PDP^{-1} avec P matrice inversible dont les colonnes sont une base de vecteurs propres de A et D diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres correspondantes (l'ordre des valeurs propres doit coïncider avec l'ordre des vecteurs propres).

   Attention : on vous demande que chaque vecteur propre choisi ait pour premier coefficient 1. Si un de vos vecteurs X_i ne vérifie pas cette propriété, il faut prendre un vecteur de la forme λX_i qui convient. En effet, il est colinéaire à X_i donc c'est aussi un vecteur propre associé à la même valeur propre (car un espace propre est toujours un espace vectoriel donc stable par multiplication par un scalaire).

6.

7. Si 2 matrices A et B sont semblables (i.e. il existe P inversible telle que $A = PBP^{-1}$) alors on a toujours : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PB^nP^{-1}$. Mais ce n'est pas une propriété du cours donc il faut toujours le reprouver par récurrence.

8. Pour isoler D^n dans l'égalité obtenue à la question précédente, il faut multiplier du bon côté par P et P^{-1}.

9. Les matrices de l'ensemble E sont définies par une équation ($AM = MA$) dont on ne connait pas les solutions. Elles ne sont pas définies explicitement (on dit que E est un ensemble implicite).

   Lorsqu'un ensemble est implicite, on montre que c'est un espace vectoriel par caractérisation des sous-espaces vectoriels.

10. Les matrices de F sont explicites (on connait leur forme).

    Lorsqu'un ensemble est explicite, on montre que c'est un espace vectoriel en le mettant sous la forme $F = Vect(......)$. On obtient une famille génératrice de F par la même occasion.

    Pour obtenir une base, il faut en extraire une famille génératrice qui est aussi libre. On vérifie si la famille est libre : si c'est le cas, c'est ok, sinon, on enlève le vecteur "en trop" (celui qui s'exprime en fonction des autres) et on recommence le processus...

11. Pour montrer qu'un ensemble est inclus dans un autre, il n'y a qu'une seule méthode : on montre que toute matrice M de F appartient forcément à E.

    La rédaction du raisonnement est la suivante : soit M une matrice quelconque de F, c'est-à-dire M vérifie (est de la forme)... Montrons que M appartient forcément à E c'est-à-dire qu'elle vérifie...

12. (a) Pour montrer une équivalence, il faut raisonner par double implication (si c'est compliqué) ou directement par équivalence (si c'est très simple, ce qui est le cas ici).

    Il faut partir de l'une des équations et la transformer par équivalence en une équation plus simple (utiliser les liens entre A et D et entre M et N donnés par l'énoncé).

    (b) Pour résoudre une équation matricielle, il faut poser une matrice avec des coefficients inconnus.

    (c) A partir des matrices N trouvées à la question précédente (vérifiant $DN = ND$), on obtient les solutions de l'équation $AM = MA$. Il faut en déduire la forme des matrices M appartenant à E puis en déduire que $E = F$.

Exercice 2

1. On montre que $E_1(A)$ et $E_2(A)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ en utilisant la caractérisation des sous-espaces vectoriels.

2. (a) Pour montrer que $E_1(A) \subset E_2(A)$, on prend un élément quelconque $M \in E_1(A)$ et on montre que $M \in E_2(A)$.

   (b) Il faut montrer la deuxième inclusion $E_2(A) \subset E_1(A)$ dans le cas où A est inversible en prenant un élément quelconque $M \in E_2(A)$ et on montrant que $M \in E_1(A)$.

   (c) Encore par double inclusion. $\supset$ est évidente (car $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel donc $0 \in E_1(A)$). Pour $\subset$, on prend $M \in E_1(A)$, donc $AM = M$. On passe tout du même coté de l'équation et on utilise l'hypothèse.

3. Il faut utiliser les questions 2.(b) et 2.(c) en remarquant que B et $B - I_3$ sont inversibles.

4. (a) En l'absence de suggestion des valeurs propres ou des vecteurs propres de C, et en l'absence de suggestion d'un polynôme annulateur de C, on est obligés de revenir à $C - \lambda I_3$ et faire le pivot de Gauss.

   Résultats intermédiaire pour la suite : vous êtes censés obtenir $Sp(C) = \{0, 1, 2\}$.

   (b) On justifie que C est diagonalisable (en démontrant qu'on a bien obtenu à la question précédente une base de vecteurs propres). Puis on en déduit P et D.

   Attention à l'ordre des vecteurs propres et des coefficients de D : on veut que $d_{1,1} < d_{2,2} < d_{3,3}$.

   Attention également aux vecteurs propres que vous avez choisis : on veut qu'ils aient pour premier coefficient 1. Si un de vos vecteurs X_i ne vérifie pas cette propriété, il faut prendre un vecteur de la forme λX_i qui convient. En effet, il est colinéaire à X_i donc c'est aussi un vecteur propre associé à la même valeur propre (car un espace propre est toujours un espace vectoriel donc stable par multiplication par un scalaire).

   Résultat intermédiaire pour la suite :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (c) On raisonne ici par équivalence. On part de $M \in E_1(C)$ qu'on traduit en terme d'équation matricielle puis on remplace C par PDP^{-1}. On multiplie enfin par P^{-1} pour obtenir que $P^{-1}M \in E_1(D)$.

(d) On pose $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et on cherche les coefficients en résolvant l'équation $DN = N$.

(e) Grâce aux deux questions précédentes, on peut récupérer la forme des matrices appartenant à $E_1(C)$ puis obtenir une base et la dimension de $E_1(C)$.

(f) On applique le même raisonnement à $E_2(C)$ que pour $E_1(C)$ (reprendre les questions 4.(c) (d) et (e)) en adaptant les calculs.

Exercice 3

1. Une fonction est paire si :

   (a) Son ensemble de définition D est symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire si $x \in D$ alors $-x \in D$)

   (b) $\forall x \in D,\ f(-x) = f(x)$

   Rappelons que dans ce cas, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Il suffit donc de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$ pour connaître sa courbe sur $\mathbb{R}_-$.

   Une fonction est impaire si :

   (a) Son ensemble de définition D est symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire si $x \in D$ alors $-x \in D$)

   (b) $\forall x \in D,\ f(-x) = -f(x)$

   Rappelons que dans ce cas, sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère. Il suffit donc de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$ pour connaître sa courbe sur $\mathbb{R}_-$.

2. Pas de difficulté.

3. Vérifier en quel point on cherche l'équivalent pour orienter la méthode : en 0, $\pm\infty$ ou $a \neq 0$ (ce dernier cas doit conduire à un changement de variable).

   Effectuer toutes les factorisations "réelles" que l'on voit, car l'équivalent passe au produit et au quotient; il vaut mieux traiter plusieurs facteurs compliqués qu'un seul simple !

   Chercher la limite de chaque facteur; si elle est finie non nulle, c'est son équivalent !

   Si on a une limite infinie ou nulle, factoriser les sommes par le terme prépondérant (le plus fort) pour faire apparaître un facteur qui tend vers une constante, puis simplifier.

   Si la somme "problématique" est à l'intérieur d'une fonction (ln), puissance, etc... il faut faire de même !

4. On ne nous demande pas l'expression de f^{-1}. On utilise donc le théorème de bijection et pas la résolution de $f(x) = y$.

5. Pas de difficulté.

6. Si l'inégalité à prouver est valable pour $t \in [a; b]$ (ou $t \in [a; +\infty[$) ou peut toujours essayer de partir de $a \leq t \leq b$ (ou $t \leq a$) et construire l'inégalité (en justifiant chaque transformation!)

   Sinon on étudie le signe de la différence.

   Ensuite on effectue toutes les factorisations "réelles" pour utiliser un tableau de signe.

   Si l'un des facteurs n'a pas de signe évident (somme du premier degré ou somme de termes de même signe), il faut poser une fonction égale à ce facteur et étudier ses variations pour obtenir son signe.

7. Sur un tel graphique, on doit recenser toutes les informations précédemment obtenues sur la ou les fonctions.

8. Idem à la question 1.

9. Attention à justifier que u tend vers 0 avant d'utiliser des DL usuels en 0 en une variable u !

10. Utiliser les définitions de la continuité et de la dérivabilité en un point particulier.

    Comme les limites à obtenir sont en 0, le DL précédent est valable. Attention au traitement des $o(\ )$ dans le calcul !

11. Pas de difficulté.

12. Pas de difficulté non plus.

13. Il faut le signe de $f'(x)$, qui doit donc être factorisé au maximum pour utiliser un tableau de signe.

    Si l'un des facteurs n'a pas un signe évident, poser une fonction égale à ce facteur et étudier ses variations pour obtenir son signe (utiliser la question 12).

14. Étudier le sens de variation de f pour obtenir l'intervalle image $f([0.8;1])$.

    Pour montrer une inégalité ou un encadrement sur une suite récurrente, on utilise une démonstration par récurrence en pensant à utiliser les variations de f si on les connaît.

15. Pour prouver qu'une équation a une solution sans donner sa valeur, on ne résout pas l'équation ! On utilise le théorème de la bijection.

16. On ne connaît pas α, seulement $f(\alpha)$: on commence donc par encadrer $f(\alpha)$ entre deux valeurs du type $f(\ )$ puis on utilise les variations de f.

    La deuxième partie de la question est plus difficile : on peut multiplier les inégalités et les encadrements, mais seulement si tous les termes sont positifs!

17. La première inégalité sur une suite récurrente, ultra classique, s'obtient avec le théorème des accroissements finis.

    La deuxième inégalité, toute aussi classique, doit s'obtenir par récurrence à l'aide du résultat précédent.

    Remarque : On demande souvent directement la deuxième, et il faudra savoir qu'il faut d'abord prouver la première par les accroissements finis puis la seconde par récurrence.

18. Utiliser la question précédente et le théorème d'encadrement.

19. On remarque que si $0,2(0,5)^n \leq 0,001$ alors on aura bien $|u_n - \alpha| \leq 0,001$. On résout donc l'inéquation $0,2(0,5)^n \leq 0,001$ d'inconnue n. Pour cela :

    - ne pas laisser de nombres à virgules lorsque l'on fait des calculs, les mettre sous forme de fractions d'entiers.
    - pour pouvoir isoler n dans l'inéquation, il faudrait mettre $(0,5)^n$ sous la forme exponentielle à un moment...
    - ne pas arrêter les calculs tant que vous n'avez pas fait apparaître $2\dfrac{\ln(5)}{\ln(2)}$, au vu de l'indication de l'énoncé.

20. /
