Indications - DM 9

A rendre le Vendredi 20 Décembre

Exercice 1

1. Pour A, on reconnait du $u' \times u^{-1}$.

   Pour B, on reconnait du $u' \times u^{\alpha}$.

   Pour C, on reconnait du $u' \times e^{u}$.

   Pour D, on reconnait du $u' \times u^{\alpha}$.

   Pour E, on reconnait du $u' \times u^{\alpha}$.

2. (a) Par identification.

   (b) On utilise la question précédente pour décomposer en deux intégrales puis on utilise la formule de la primitive de $u' \times u^{-1}$.

3. Pour A, on intègre x et on dérive $\ln(x)$.

   Pour B, on intègre $\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$ et on dérive $\dfrac{x^2}{2}$.

   Pour C, on intègre $3x^2e^{x^3}$ et on dérive $\dfrac{x^3}{3}$.

   Pour D, on intègre $\dfrac{1}{x}$ et on dérive $\ln(x)$. On obtient la relation $D = -D$, donc $D = ...$

4. Pour A, on doit obtenir après changement de variable $\displaystyle\int_1^2 \frac{t}{t+1}dt$ et on pense à $\dfrac{t}{t+1} = 1 - \dfrac{1}{t+1}$...

   Pour B, on doit obtenir après changement de variable $\displaystyle\int_1^2 \frac{t}{t+1}dt$ et on termine comme pour A.

   Pour C, on doit obtenir la relation $C = -C$, donc $C = ...$

Exercice 2

1. Il faut justifier que les fonctions à l'intérieur des intégrales sont définies et continues sur $[0, 1]$.

2. Pour I_0, on doit intégrer une expression de la forme $u'u^{\alpha}$ avec $\alpha \neq -1$.

   Pour I_1, il faut utiliser l'astuce (à retenir !!) $\dfrac{x}{(1+x)^2} = \dfrac{(1+x)-1}{(1+x)^2} = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{(1+x)^2}$ puis les formules sur les primitives.

3. (a) Avec la linéarité de l'intégrale, on rassemble les trois intégrales en une seule puis on factorise et on simplifie la fonction à l'intérieur qu'on peut ensuite facilement intégrer.

   (b) Avec la question précédente, on exprime I_2 en fonction de I_1 et de I_0 puis on utilise les résultats de la question 2.

   (c)

4. (a) Par construction : on encadre $\dfrac{x^n}{(1+x)^2}$ puis on intègre l'encadrement (pensez à dire que les bornes sont croissantes !!).

   (b) Appliquer le théorème d'encadrement !

5. Pensez à dire que les fonctions sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$.

6. (a) Pour J_0, on doit intégrer une expression de la forme $u'u^{-1}$.
   Pour $J_n + J_{n+1}$: Avec la linéarité de l'intégrale, on rassemble les deux intégrales en une seule puis on factorise et on simplifie la fonction à l'intérieur qu'on peut ensuite facilement intégrer.
   (b) Avec la question précédente, on exprime J_1 en fonction de J_0 puis on remplace J_0 par le résultat obtenu.

7.

8. Faire une récurrence. Pour l'hérédité, on utilise la relation trouvée à la question 6.(a) pour exprimer J_{n+1} en fonction de J_n puis appliquer l'hypothèse de récurrence.

9. (a) Avec la question 5, on exprime J_n en fonction de I_{n+1} puis on passe à la limite en utilisant la question 4.
   (b) Avec l'égalité de la question 8, on obtient la limite de la somme partielle de la série. On en déduit la nature de la série et la valeur de la somme.
   (c) A partir de la relation de la question 5 (décalée d'un rang), on isole nJ_n puis on passe à la limite. On en déduit un équivalent de J_n.

10. (a) Il faut utiliser les questions 8. et 9.(c).
    (b) Pour le premier point, on remarque que, à un facteur près, c'est la série de la question 9.(b).
    Pour le deuxième point, il faut justifier que le théorème de comparaison des séries ne s'applique pas ici.

11. (a) Partir du membre de droite et simplifier.
    (b) Il faut sommer l'égalité de la question précédente pour k allant de 1 à n et simplifier (séparer en deux sommes, une télescopique et une géométrique).
    (c) On applique la relation de la question précédente avec $n = 2n$ et $n = 2n + 1$ et on passe à la limite dans chacun des cas.
    On conclut sur la convergence de la série de terme général u_k avec le rappel de l'énoncé.

12. Il faut exprimer u_n sous forme d'une somme en remplaçant $\ln 2$ par la somme d'une série (question 9.(b)) puis en simplifiant.

Exercice 3

1. (a) Comme indiqué dans l'énoncé, on applique la méthode du pivot de Gauss à la matrice $A - \lambda I_3$.
   (b) Aucune difficulté. La dérivée de f est un polynôme du second degré dont on étudie le signe en faisant Δ.
   (c) On calcule $f(0)$ et $f(3)$ qu'on place dans le tableau de variation de f. On en déduit le signe de M et m.
   (d) En appliquant 3 fois le théorème de la bijection, on démontre que f admet exactement 3 racines distinctes qui sont exactement les valeurs propres de A d'après la question 1.(a).
   On peut alors appliquer le résultat donné dans l'énoncé (et qu'on reverra au chapitre 11 !

2. (a) Pour montrer que E est un espace vectoriel, on montre que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ en utilisant la caractérisation des sous-espaces vectoriels.
   (b) On considère une matrice $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et on cherche les coefficients en résolvant l'équation $DN = ND$ (en utilisant que λ_1, λ_2 et λ_3 sont deux à deux distincts).

(c) On raisonne ici par équivalence. On part de $M \in E$ qu'on traduit en terme d'équation matricielle puis on remplace A par PDP^{-1}. On multiplie enfin par P et P^{-1} pour obtenir que $P^{-1}MP$ commute avec D.

(d) Avec les deux questions précédentes, $M \in E$ si $P^{-1}MP$ commute avec D, donc si $P^{-1}MP$ est diagonale. Il suffit alors de multiplier correctement par P et P^{-1} pour obtenir le résultat demandé.

(e) Avec la question précédente, on a obtenu une famille génératrice de 3 vecteurs de E. Il faut montrer qu'elle est libre en revenant à la définition d'une famille libre et en multipliant par P et P^{-1} pour simplifier l'équation à résoudre. On a alors une base de E et donc sa dimension.

(f) Rappelons (d'après le cours !!) que, si P est un polynôme annulateur de A, les valeurs propres de A sont racines de P. On obtient alors le résultat demandé en raisonnant sur le nombre de racines de P et son degré.

Pour montrer que (I, A, A^2) est bien une base de E :

- Il faut d'abord vérifier que les trois vecteurs de cette famille appartiennent à E.
- On montre ensuite qu'elle est libre en revenant à la définition d'une famille libre. On remarque alors qu'on obtient un polynôme de degré 2 annulateur de A qui, d'après ce qu'on vient de démontrer, est forcément nul.
- Comme on connait la dimension de E, inutile de montrer que la famille est génératrice. On conclut en remarquant que le cardinal de la famille et égal à la dimension de E.

Exercice 4

1. (a) Traduire les événements $(X = 0)$, $(X = 1)$ et $(X = 2)$ à l'aide des événements P_i et F_i. Puis calculer les probabilités.

   (b) Traduire $(X = n)$, qui signifie que l'on a obtenu n Face et deux Pile, le second au $(n+2)$-ème lancer, le premier à l'un des $(n + 1)$ rangs précédents. Puis calculer les probabilités.

2. (a) Attention, le nombre n dépend de la première expérience et peut donc être aussi grand que l'on veut.

   (b) Sachant $(X = n)$, U suit une loi usuelle. Laquelle ? Attention à bien repérer les cas impossibles.

   (c) On applique les probabilités totales avec le système complet d'événements associé à X. Puis utiliser la loi conditionnelle de U sachant $(X = n)$ (en pensant aux cas impossibles dans la somme) et la loi de X.

   (d) Pour l'espérance, il faut bien justifier la convergence de la série pour justifier que U admet une espérance.

   Pour la variance, il faut commencer par déterminer le moment d'ordre 2 de U (en justifier la encore que U admet un moment d'ordre 2). Puis utiliser la formule de Koenig-Huygens.

3. (a) Il faut justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'événement $(V = n)$ peut être réalisé.

   (b) Pour déterminer la loi conditionnelle de V sachant $(X = n)$, on remplace V par $X - U$ puis X par n. On se ramène ainsi à la loi conditionnelle de U sachant $(X = n)$.

   (c) Il suffit de reprendre les calculs de la question 2.(c).

4. Il faut montre que $P((U = k) \cap (V = \ell)) = P(U = k) \times P(V = \ell)$.

5. Pour calculer $Cov(X, U)$, on utilise que $X = V + U$ et les propriétés de la covariance.

6. /

7. (a) Z compte le rang du premier succès ("obtenir Pile") dans une suite indéfinie de répétitions d'expériences de Bernoulli indépendantes (lancer la pièce), de même paramètre (p, la probabilité de faire Pile)...
   (b) Penser aux formules sur $E(aX+b)$ et $V(aX+b)$...
   (c) Il faut se ramener à la loi de Z qu'on connait.
8. (a) Lorsqu'un événement dépend de deux variables aléatoires (comme ici avec $(X \leq Y)$), il faut introduire un système complet d'événements sur l'une des variables (par exemple X) puis faire les probabilités totales.
   (b) Utiliser les questions 1.(b) et 7.(c) !
   (c) Il faut résoudre l'équation $P(X \leq Y) = \dfrac{1}{2}$.