

Interrogation 16

Interrogation du Jeudi 23 Mars

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 .

- Donner la définition du gradient et de la matrice hessienne de f en un point (x_0, y_0) .

- Donner la définition d'un point critique (x_0, y_0) de f .

- Donner le lien entre point critique de f et extremum local de f .

- Soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de la matrice hessienne de f en un point critique (x_0, y_0) .
Que peut-on dire :
 - si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$?

 - si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$?

 - si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$?

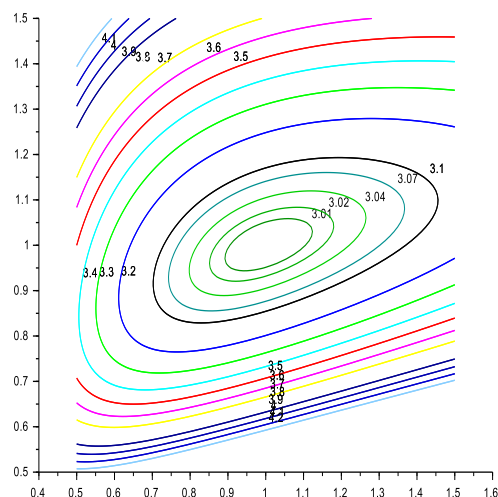
 - si $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 0$?

2. On considère la fonction f de classe \mathcal{C}^2 définie sur l'ouvert de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \quad f(x, y) = \frac{x}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x}.$$

(a) On a tracé les lignes de niveau de la fonction f ci-contre.

Établir une conjecture à partir du graphique quant à l'existence d'un extremum local pour f , dont on donnera la nature, la valeur approximative et les coordonnées du point en lequel il semble être atteint.



- (b) Calculer les dérivées partielles premières de f , puis démontrer que f admet un unique point critique, noté A , que l'on déterminera.

- (c) Calculer les dérivées partielles secondes de f , puis démontrer que la matrice hessienne de f au point A est la matrice H définie par :
$$H = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

- (d) En déduire que la fonction f admet au point A un extremum local, préciser sa nature et donner sa valeur.