

Le jeu YY

Anthony Mansuy

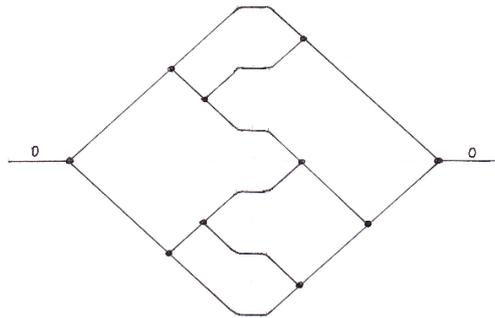
*Laboratoire de Mathématiques, Université de Reims
Moulin de la Housse - BP 1039 - 51687 REIMS Cedex 2, France
e-mail : anthony.mansuy@univ-reims.fr*

Mars 2013

Résumé. Nous introduisons un nouveau jeu, le jeu YY, semblable au jeu du Sudoku. Il consiste à étiqueter les arêtes d'un graphe. Nous expliquons la construction de ces graphes, basée sur des arbres binaires plans. Nous donnons une interprétation mathématiques du jeu. On s'intéresse aussi aux graphes décomposables et au lien avec l'ordre de Tamari sur les arbres binaires plans. On s'attache enfin à expliquer le lien avec le théorème des quatre couleurs.

Ces notes sont largement inspirées de l'article [2] de J.-L. Loday.

Voici un exemple de grille de jeu, appelé graphe YY :



Principe du jeu : Indexer chaque arête par des étiquettes 0, 1 ou 2 de sorte que les arêtes issues de chaque sommet ont toutes des étiquettes différentes.

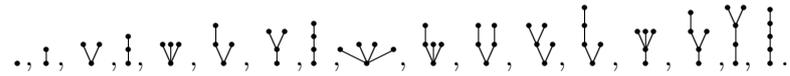
Dans la suite, nous allons :

1. Proposer une construction des graphes YY à partir des arbres binaires plans.
2. Donner deux interprétations mathématiques du jeu YY, en terme de magma et d'algèbre de Lie.
3. Définir la notion de graphes décomposables et de graphes premiers. On donnera un critère pour déterminer si un graphe est décomposable à l'aide de l'ordre de Tamari sur les arbres binaires plans.
4. Expliquer le lien avec le théorème des quatre couleurs.

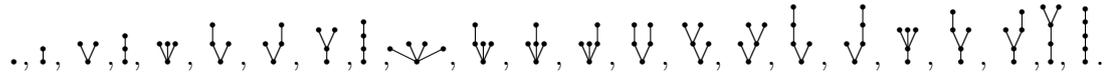
1 Construction des graphes YY à partir des arbres binaires plans

Définition 1 – *Un arbre enraciné est un graphe connexe, sans cycle, avec un sommet particulier, la racine. Celle-ci est représenté en bas et les feuilles, qui sont les sommets*

sans descendant, sont représentées en haut. Par exemple,



- Un arbre plan est un arbre enraciné avec un ordre total sur les descendants de chaque sommet (représentés de gauche à droite). Par exemple,



- Un arbre binaire plan est un arbre plan dont chaque sommet est trivalent (c'est-à-dire avec un ancêtre et deux descendants). Notons Y_n l'ensemble des arbres binaires plans d'arité n (autrement dit avec n feuilles et $n - 1$ sommets intérieurs). Par exemple,

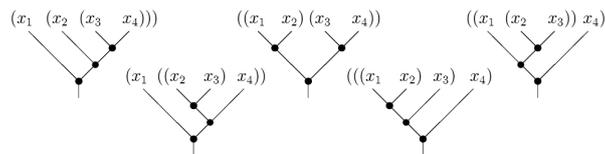
$$\begin{aligned} Y_1 &= \{ \uparrow \} \\ Y_2 &= \{ \Upsilon \} \\ Y_3 &= \{ \begin{array}{c} \Upsilon \\ \Upsilon \end{array}, \begin{array}{c} \Upsilon \\ \Upsilon \end{array} \} \\ Y_4 &= \{ \begin{array}{c} \Upsilon \\ \Upsilon \\ \Upsilon \end{array}, \begin{array}{c} \Upsilon \\ \Upsilon \\ \Upsilon \end{array} \} \end{aligned}$$

Remarque. Soit $T \in Y_n$. Alors il existe des uniques arbres binaires plans $T_l \in Y_k$ et $T_r \in Y_{n-k}$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$, tels que T soit obtenu en greffant T_l et T_r sur une racine commune.

Notons t_n le nombre d'arbres binaires d'arité n . Alors $t_1 = t_2 = 1$ et, en utilisant la remarque précédente, on a pour $n \geq 3$,

$$t_n = \sum_{k=1}^{n-1} t_k t_{n-k}.$$

On en déduit que $t_n = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$. C'est le $(n-1)$ -ème nombre de Catalan (voir A000108 dans [3]). C'est aussi le nombre de parenthésages différents de n éléments. Il existe en fait une bijection entre Y_n et le nombre de parenthésages différents de n éléments. Pour $n = 4$, on a par exemple :



Les arbres binaires plans permettent de coder des relations opéradiques. En effet,

- si $(A, *)$ est une algèbre associative, alors le produit $*$ vérifie la relation d'associativité qu'on peut exprimer à l'aide d'arbres binaires plans par :

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ * \\ \diagup \quad \diagdown \\ * \end{array} \quad \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ * \\ \diagup \quad \diagdown \\ * \end{array} = \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \\ * \\ \diagup \quad \diagdown \\ * \end{array}$$

- si $(A, *)$ est une algèbre commutative, alors le produit $*$ vérifie les relations suivantes :

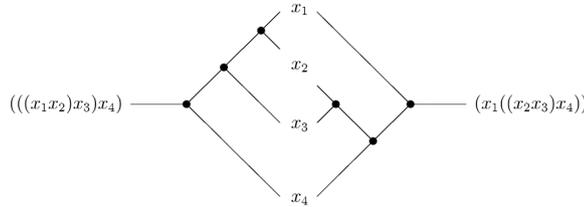
$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ * \\ \diagup \quad \diagdown \\ * \end{array} = \begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ * \\ \diagup \quad \diagdown \\ * \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \\ * \\ \diagup \quad \diagdown \\ * \end{array} - \begin{array}{c} 2 \quad 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \\ * \\ \diagup \quad \diagdown \\ * \end{array}$$

– si $(A, [,])$ est une algèbre de Lie, alors le crochet $[,]$ vérifie :

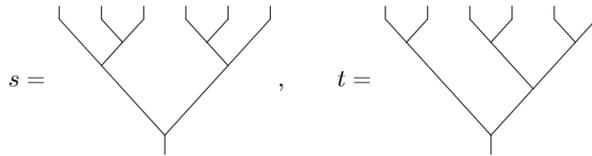
$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad / \\ [,] \\ | \\ \end{array} = \begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ / \quad \diagdown \\ [,] \\ | \\ \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad / \\ [,] \\ / \quad \diagdown \\ [,] \\ | \\ \end{array} + \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ / \quad \diagdown \\ [,] \\ / \quad \diagdown \\ [,] \\ | \\ \end{array} + \begin{array}{c} 3 \quad 1 \\ / \quad \diagdown \\ [,] \\ / \quad \diagdown \\ [,] \\ | \\ \end{array} = 0$$

Les graphes YY sont obtenus en fusionnant les feuilles de deux arbres binaires plans S et T de même arité :

– Si $S = \begin{array}{c} \diagdown \quad / \\ \diagdown \quad / \\ \diagdown \quad / \\ | \\ \end{array}$ et $T = \begin{array}{c} \diagdown \quad / \\ \diagdown \quad / \\ \diagdown \quad / \\ | \\ \end{array}$, le (S, T) -graphe YY associé est :



– Le graphe qui est donné au début est obtenu en fusionnant les arbres



2 Interprétations mathématiques du jeu YY

Le but du jeu YY est donc de trouver des éléments $x_1, \dots, x_n \in \{0, 1, 2\}$ tels que

1. A chaque sommet, les trois étiquettes 0, 1, 2 apparaissent. Ceci implique en particulier que l'indexation d'un graphe YY est entièrement déterminé par l'indexation des arêtes "du milieu" obtenues en fusionnant les feuilles des deux arbres. Il suffit donc de trouver une indexation des feuilles telle que lorsqu'on calcule dans chacun des deux arbres, aucun sommet n'a deux entrées avec la même étiquette.
2. Les étiquettes des racines, qui correspondent aux résultats finals, doivent toujours être nulles.

Ces règles s'interprètent de deux façons différentes.

2.1 Magma

On considère le magma commutatif $(X, *)$ où $X = \{0, 1, 2, \infty\}$ et où le produit $*$ est donné par

$*$	0	1	2	∞
0	∞	2	1	∞
1	2	∞	0	∞
2	1	0	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞

Si $n \geq 1$, $S, T \in Y_n$ et $x_1, \dots, x_n \in \{0, 1, 2\}$, on note $S(x_1, \dots, x_n)$ et $T(x_1, \dots, x_n)$ les éléments de X associés.

Conjecture 1 Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $S, T \in Y_n$, il existe $x_1, \dots, x_n \in \{0, 1, 2\}$ tels que

$$S(x_1, \dots, x_n) = T(x_1, \dots, x_n) \neq \infty.$$

2.2 Algèbre de Lie

Soit $Z = \{z_0, z_1, z_2\}$ et $\mathbb{F}_2[Z]$ l'espace vectoriel engendré par Z sur le corps \mathbb{F}_2 . On munit $\mathbb{F}_2[Z]$ du produit binaire $[z_i, z_j]$ défini par :

$i \backslash j$	z_0	z_1	z_2
z_0	0	z_2	z_1
z_1	z_2	0	z_0
z_2	z_1	z_2	0

Lemme 2 $[,]$ est un crochet de Lie sur $\mathbb{F}_2[Z]$.

Si $n \geq 1$, $S, T \in Y_n$ et $a_1, \dots, a_n \in Z$, on note $S(a_1, \dots, a_n)$ et $T(a_1, \dots, a_n)$ les éléments de Z associés.

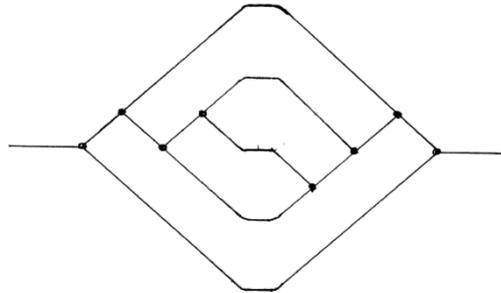
Conjecture 2 Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $S, T \in Y_n$, il existe $a_1, \dots, a_n \in Z$ tels que

$$S(a_1, \dots, a_n) = T(a_1, \dots, a_n) \neq 0.$$

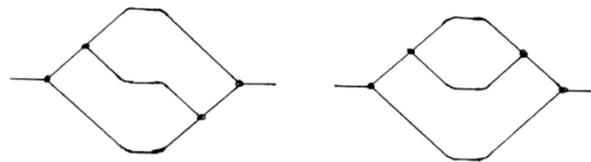
3 Graphes décomposables et ordre de Tamari

Les conjectures 1 et 2 sont équivalentes au fait que tout jeu YY admet une solution. Remarquons que cette solution n'est pas unique : étant donnée une solution, on obtient une deuxième solution en échangeant les 1 et les 2. Le problème de l'existence de solution d'un jeu YY est encore ouvert. En fait, il suffit de prouver la conjecture pour certains graphes YY, les graphes premiers.

Soit $S, T \in Y_n$ et soit un (S, T) -graphe YY. Supposons qu'il existe un intervalle $[i, j]$ de l'intervalle $[1, n]$ des feuilles de S et T tel que le sous-graphe contenant les feuilles $\in [i, j]$ soit un graphe YY. Par exemple, $[2, 4]$ a cette propriété dans l'exemple suivant :



Si un tel sous-intervalle strict de $[1, n]$ existe, alors on peut scinder le graphe YY en deux graphes YY construits avec des arbres d'arité plus petite. Dans l'exemple précédent, on obtient les deux graphes suivants :



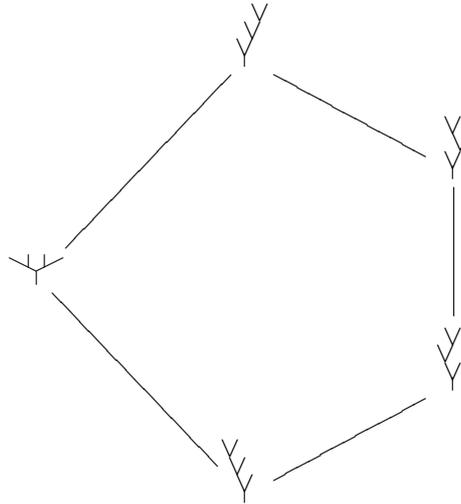
Dans ce cas, on dit que le graphe YY est décomposable. Sinon on dit qu'il est premier. Le graphe YY du début est par exemple premier. Il existe un critère pour déterminer si un graphe YY est premier ou décomposable. Il est basé sur l'ordre de Tamari défini sur les arbres binaires plans.

Il existe en effet une structure de poset sur Y_n , $n \geq 1$. La relation d'ordre est définie à partir de la transformation de Tamari local :

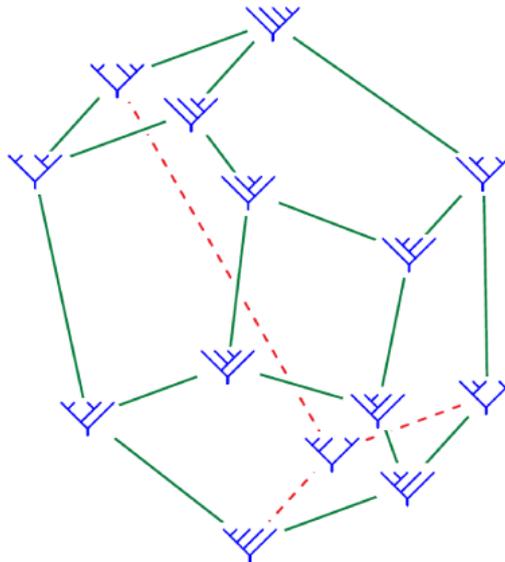
$$\Downarrow \xrightarrow{\leq} \Downarrow$$

Exemples

– Voici le diagramme de Hasse pour Y_4 :



– Voici le diagramme de Hasse pour Y_5 :



On peut alors montrer que Y_n , muni de l'ordre de Tamari, est un treillis, c'est-à-dire : Pour tout élément $S, T \in Y_n$, il existe une borne supérieure et une borne inférieure à l'ensemble $\{S, T\}$. On note alors :

$$S \vee T = \sup(S, T), \quad S \wedge T = \inf(S, T).$$

On a alors le critère suivant :

Proposition 3 *Soit $S, T \in Y_n$. Si $S \vee T$ est égal au peigne à droite et si $S \wedge T$ est égal au peigne à gauche, alors le (S, T) -graphe YY associé à S et T est premier. Sinon, il est décomposable.*

4 Lien avec le théorème des quatre couleurs

Considérons \mathfrak{g} l'espace vectoriel, défini sur un corps \mathbb{K} , engendré par les éléments i, j, k . Soit $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ le produit défini par les relations suivantes :

$$\begin{cases} [i, i] = [j, j] = [k, k] = 0, \\ [i, j] = -[j, i] = k, \\ [j, k] = -[k, j] = i, \\ [k, i] = -[i, k] = j. \end{cases}$$

Alors $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ est une algèbre de Lie. Elle peut être présentée avec les générateurs $\{i, j\}$ et les relations $[[i, j], i] = j$ et $[[j, i], j] = i$.

Conjecture 3 Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $S, T \in Y_n$, il existe $z_1, \dots, z_n \in \mathfrak{g}$ tels que

$$S(z_1, \dots, z_n) = T(z_1, \dots, z_n) \neq 0.$$

Proposition 4 [1] *La conjecture 3 implique la conjecture des quatre couleurs.*

Remarquons que les conjectures 2 et 3 sont très proches. Notons cependant deux différences dans la conjecture 2 :

1. Comme on travaille sur \mathbb{F}_2 , on ne s'intéresse pas au problème de signes.
2. On utilise seulement les générateurs et pas des combinaisons linéaires.

Références

- [1] Kauffman L., *Map coloring and the vector cross product*, J. Combin. Theory Ser. B 48 (1990), no. 2, 145-154.
- [2] Loday J.-L., *The YY game* (2011), arxiv :1108.5639
- [3] Sloane N.J.A., *On-line encyclopedia of integer sequences*, [http ://www.research.att.com/~njas/ sequences/ Seis.html](http://www.research.att.com/~njas/sequences/Seis.html).