Leçon 1

Expérience aléatoire, probabilité, probabilité conditionnelle

1 Mon esquisse de plan

Plan

1) Espaces probabilisables

- **Définitions.** Univers des possibles d'une expérience aléatoire, tribu des événements.
- **Opérations sur les événements.** Union, intersection, complémentaire. Propriétés (commutatif, associatif, distributif, élément neutre, lois de Morgan).
- **Système complet d'événements.** Définition. Décomposition d'un événement sur un système complet d'événements.

2) Espace probabilisé

- **Probabilité.** Définition d'une probabilité. Propriétés. Événements certains/quasi-certains et impossibles/quasi-impossibles. Théorème de la limite monotone.
- **Équiprobabilité.** Cas particulier de l'équiprobabilité. Calcul de la probabilité d'un événement dans ce cas.

3) Conditionnement

- **Probabilité conditionnelle.** Définition et propriétés d'une probabilité conditionnelle.
- **Formules.** Formule des probabilités composées. Formule de Bayes. Formule des probabilités totales.

4) Indépendance

- **Définitions et propriétés.** Indépendance deux à deux. Indépendance mutuelle. Lemme des coalitions.
- **Lien avec le conditionnement.** CNS pour que deux événements soient indépendants.

Développements possibles

Propriétés d'une probabilité.
Formule des probabilités composées.
Formule de Bayes.
Formule des probabilités totales.

Programmes informatiques possibles - Propositions d'exercices

Simulation d'expériences aléatoires à l'aide d'un tableur et/ou de Python.
Méthode de Monte-Carlo (pour calculer une valeur approchée d'une intégrale, de π...).

Bibliographie

- A. Combrouze et A. Dede. Probabilités et Statistiques 1.
- D. Delaunay. Exercices d'algèbre et de probabilités.
- J.-P. Lecoutre. Statistique et probabilités.
- S. Rondy. Maths ECS 1-ière année.
- Manuel de Seconde et de Première. Programme 2019.

2 Questions

Niveau 1

1. L'égalité $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ implique-t-elle que les événements A et B sont incompatibles ?
2. Deux événements incompatibles sont-ils nécessairement indépendants ?
3. Deux événements indépendants sont-ils nécessairement incompatibles ?

4. Montrer que, si deux événements sont indépendants, alors leurs complémentaires le sont aussi.

5. Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$.

   Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

6. Soient A, B et C trois événements tels que :

$$\begin{cases} P(A) = 0.3 \\ P(B) = 0.4 \\ P(C) = 0.6 \end{cases}, \quad \begin{cases} P(A \cup B) = 0.6 \\ P(\overline{A} \cup \overline{C}) = 0.9 \\ P(\overline{B} \cup \overline{C}) = 0.8 \end{cases} \quad \text{et} \quad P(A \cap B \cap C) = 0.05.$$

   Quelle est la probabilité que se réalise l'un des événements A, B ou C ?

7. Un dé cubique, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, est tel que, lorsqu'on le lance, le 6 sort une fois sur deux alors que les autres numéros ont autant de chances d'apparaître. On lance ce dé.

   Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

8. Déterminer le nombre minimum n de personnes dans un groupe pour qu'il y est au moins une chance sur deux qu'au moins deux de ces personnes soient nés le même jour (on ne prendra pas en compte les années bissextiles).

9. On tire simultanément trois cartes d'un jeu de 32 cartes (tirages sans remise, pas de considération d'ordre).

   (a) Déterminer la probabilité d'obtenir exactement 2 rois.

   (b) Déterminer la probabilité d'obtenir au moins un coeur.

   (c) Quelle est la probabilité que l'on obtienne 3 cartes de même hauteur ?

   (d) Déterminer la probabilité d'obtenir exactement 3 trèfles dont la dame de trèfle.

10. On lance deux fois un dé équilibré et on considère les trois événements suivants :

    A : "la somme des 2 lancers est égale à 6".

    B : "la somme des 2 lancers est égale à 7".

    C : "le premier lancer a donné un 4".

    Étudier l'indépendance de A et C, puis celle de B et C.

11. On lance deux dés, l'un rouge, l'autre bleu, et on considère les événements suivants :

    A : "le numéro obtenu avec le dé rouge est pair".

    B : "le numéro obtenu avec le dé bleu est pair".

    C : "la somme des deux numéros obtenus est paire".

    Étudier l'indépendance deux à deux et l'indépendance mutuelle de ces événements.

12. On a un trousseau de n clefs. Une seule ouvre la porte. On essaye chaque clef une fois jusqu'à ouvrir la porte. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note A_i l'événement "la i-ème clef ouvre la porte".

    Quel est la probabilité que la k-ième clef ouvre la porte ?

13. Dans un magasin, des machines proviennent de deux usines différentes A et B (70% viennent de A et 30% viennent de B). Parmi celles qui viennent de A, 20% présentent un défaut. Parmi celles qui viennent de B, 10% présentent un défaut.

    (a) Déterminer le pourcentage de machines dans le magasin présentant un défaut.

    (b) Une machine donnée présente un défaut.
    Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'usine B ?

Niveau 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments. On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

   (a) Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.

   (b) Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.

   (c) Déterminer le nombre de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B, C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une probabilité sur l'univers $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ telle que la probabilité de l'événement $\{1, 2, \ldots, k\}$ soit proportionnelle à k^2.

3. On suppose qu'un avion ne peux plus voler si plus de la moitié de ses réacteurs sont en panne. On note p la probabilité qu'un réacteur tombe en panne et on suppose que les réacteurs d'un avion tombent en panne de façon indépendante.

Déterminer, suivant les valeurs de p, s'il faut mieux voyager avec un avion bimoteur ou quadrimoteur.

4. Une urne contient 1 boule blanche, 1 boule verte et 1 boule rouge. On en tire n successivement avec remise ($n \geq 3$).

   Quelle est la probabilité d'avoir au moins une boule de chaque couleur ?

5. Une urne contient 8 jetons numérotés de 1 à 8. On en tire 3 simultanément au hasard. Quelle est la probabilité que la somme des numéros tirés soit supérieure ou égale à la somme des numéros restants ?

6. Un lot de 100 dés contient 25 dés pipés tels que la probabilité d'obtenir 6 en les lançant est $\frac{1}{2}$ et que les probabilités d'obtenir 1, 2, 3, 4 ou 5 sont égales. On prend un dé au hasard et on le lance.

   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 ?

   (b) On obtient 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

   (c) On obtient 2. Quelle est la probabilité que ce dé ne soit pas pipé ?

   (d) On lance ce dé n fois ($n \in \mathbb{N}^*$) et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ? Déterminer $\lim_{n\to+\infty} p_n$ et interpréter ce résultat.

7. On lance deux fois un dé. Montrer que la probabilité d'obtenir deux fois la même valeur est minimale lorsque le dé est équilibré.

8. On dispose de n urnes ($n \geq 2$), numérotées de 1 à n, et telles que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'urne numérotée par k contient k boules blanches et $(n-k)$ boules noires. On choisit au hasard une urne et on en extrait une boule. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note U_k l'événement "l'urne numérotée k a été choisie".

   (a) Déterminer la probabilité de l'événement B "on obtient une boule blanche".

   (b) On constate que la boule tirée est blanche. Déterminer la probabilité que cette boule provienne de l'urne numéro 1.

9. Une compagnie aérienne étudie la réservation sur l'un de ses vols. Une place donnée est libre le jour d'ouverture de la réservation et son état évolue chaque jour jusqu'à la fermeture de la réservation de la manière suivante :

   - Si la place est réservée le jour n, elle le sera encore le jour $n+1$ avec la probabilité $\frac{9}{10}$.
   - Si la place est libre le jour n, elle sera réservée le jour $n+1$ avec la probabilité $\frac{4}{10}$.

   Pour $n \in \mathbb{N}$, on note R_n l'événement : "la place est réservée le jour n" et $r_n = P(R_n)$ sa probabilité. On suppose que $r_0 = 0$.

   (a) Exprimer r_{n+1} en fonction de r_n.

   (b) En déduire l'expression explicite de r_n en fonction de n et calculer $\lim_{n\to+\infty} r_n$.

10. Une boite A contient deux jetons portant le numéro 0 et une boite B contient deux jetons portant le numéro 1. On tire au hasard un jeton dans chaque boite et on les échange. On recommence cette opération n fois. On s'intéresse à la somme des jetons contenus dans l'urne A à l'instant $t = n$.

    Pour cela, on introduit les évènements :

    - P_n : "la somme des jetons dans l'urne A à l'instant $t = n$ vaut 0",
    - Q_n : "la somme des jetons dans l'urne A à l'instant $t = n$ vaut 1",
    - R_n : "la somme des jetons dans l'urne A à l'instant $t = n$ vaut 2".

    On pose également $p_n = P(P_n)$, $q_n = P(Q_n)$ et $r_n = P(R_n)$.

    (a) Exprimer p_{n+1} (resp. q_{n+1}, resp. r_{n+1}) en fonction de p_n, q_n, r_n.

    (b) En déduire l'expression de q_n en fonction de n puis celle de p_n et de r_n.

    (c) Déterminer les limites des trois suites.

11. Deux joueurs lancent 2 dés parfait. A commence. Si la somme des numéros obtenus est 6, il a gagné. Sinon B lance les dés et si la somme des numéros obtenus est 7, il a gagné. Sinon A rejoue et ainsi de suite.

    (a) On note A_k l'événement "on obtient une somme égale à 6 au k-ième double jet" et B_k l'événement "on obtient une somme égale à 7 au k-ième double jet".
    Déterminer $P(A_k)$ et $P(B_k)$.

    (b) En déduire quel joueur à le plus de chance de gagner.

12. Soit une urne avec une boule blanche, une boule noire et une boule rouge. On y effectue des tirages successifs avec remise. On notera B l'événement "on a tiré au moins une boule blanche".

    (a) Écrire l'événement B (ou $\overline{B}$) de trois manières différentes :

- avec les A_n : "on n'a aucune blanche sur les n premiers tirages",
- avec les B_n : "on a une blanche pour la première fois au n-ième tirage",
- avec les C_n : "on a au moins une blanche sur les n premiers tirages".

(b) Proposer alors trois calculs pour déterminer $P(B)$. Comment peut-on interpréter le résultat obtenu ?