Leçon 2

Variables aléatoires discrètes

1 Mon esquisse de plan

Plan

1) Variables aléatoires discrètes

- **Généralités sur les variables aléatoires.** Définition d'une variable aléatoire sur un espace probabilisé. Support d'une variable aléatoire. Fonction de répartition d'une variable aléatoire : définition et propriétés. Indépendances de variables aléatoires.

- **Cas particulier des variables aléatoires discrètes.** Définition. Loi de probabilité et fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète. Opérations sur les variables aléatoires discrètes et transformées.

2) Moments d'une variable aléatoire discrète

- **Espérance.** Définition et propriétés de l'espérance. Théorème de transfert.

- **Variance.** Définition du moment d'ordre r d'une variable aléatoire discrète. Définition et propriétés de la variance. Formule de Koenig-Huygens. Variables aléatoires discrètes centrées réduites. Covariance.

- **Inégalités de concentration.** Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Loi faible des grands nombres.

3) Lois discrètes usuelles

- **Loi uniforme.** Sur $[\![1, n]\!]$ puis généralisation sur $[\![a, b]\!]$. Loi, espérance et variance.

- **Loi de Bernoulli.** Loi, espérance et variance.

- **Loi binomiale.** Loi, espérance et variance. Somme de binomiales indépendantes.

- **Loi géométrique.** Loi, espérance et variance. Une variable aléatoire discrète suit une loi géométrique si et seulement si elle est sans mémoire.

- **Loi de Poisson.** Loi, espérance et variance. Interprétation comme limite de binomiales. Somme de Poissons indépendantes.

Développements possibles

Propriétés de l'espérance et de la variance.
Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.
Espérances et variances des lois discrètes usuelles.
Somme de binomiales ou de Poissons indépendantes.

Programmes informatiques et propositions d'exercices possibles

Marches aléatoires.
Lois usuelles.

Bibliographie

- A. Combrouze et A. Dede. Probabilités et Statistiques 1.
- D. Delaunay. Exercices d'algèbre et de probabilités. MPSI-MP
- J.-P. Lecoutre. Statistique et probabilités.
- S. Rondy. Maths ECS 1-ière année.

2 Questions

Niveau 1

1. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Démontrer que :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} P(X \geq k).$$

2. Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0, 1[$.

(a) Calculer $E(X^2)$ et $E\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.

(b) Déterminer la loi de $Y = n - X$.

3. Déterminer pour quels $a \in \mathbb{R}$ il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$P(X = n) = \frac{a}{n(n+1)} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

4. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. On suppose qu'il existe un réel a tel que :

$$P(X = k) = \frac{a}{k!(n-k)!} \quad \text{pour tout } k \in [\![1, n]\!].$$

Calculer l'espérance et la variance de X.

5. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

Déterminer l'espérance de $Y = (-1)^X$.

6. Un sac contient n jetons ($n \geq 17$) dont cinq rouges et dix blancs, les autres étant verts.

Un joueur tire un jeton au hasard. S'il est rouge, il gagne 5 euros. S'il est blanc, il perd 3 euros. Et s'il est vert, il procède à un second tirage sans remettre le premier jeton.

Si le second tirage amène un jeton rouge, il gagne 4 euros. S'il est blanc, il perd 1 euro. Et s'il est encore vert, la partie est nulle et s'arrête.

Pour quelle valeur de n le jeu est-il équitable?

7. Une urne contient 2 boules blanches et $(n-2)$ boules rouges ($n \geq 2$). On tire les boules une à une sans remise jusqu'à l'obtention de la première boule blanche.

On appelle X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche et Y la variable aléatoire égale au nombre de boules restant dans l'urne à la fin de l'expérience.

(a) Déterminer la loi de X et montrer que : $E(X) = \dfrac{n+1}{3}$.

(b) Exprimer Y en fonction de X et en déduire l'expression de $E(Y)$ en fonction de n.

8. Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge. On effectue une suite de tirage au hasard dans l'urne. A chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on y ajoute une boule rouge supplémentaire. On procède ainsi jusqu'à l'obtention de la première boule rouge et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de celle-ci.

Déterminer la loi de X puis $E(X)$ et $V(X)$.

9. On lance indéfiniment une pièce, donnant Pile avec la probabilité p et Face avec la probabilité $q = 1 - p$ (avec $0 < p < 1$). Les lancers sont supposés indépendants.On considère une variable aléatoire X égale au nombre de Faces précédant le premier Pile.

Déterminer la loi de X puis $E(X)$ et $V(X)$.

Niveau 2

1. Soit $\lambda \in]0, +\infty[$. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = \frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}.$$

Déterminer λ, montrer que X admet une espérance (et la calculer) mais pas de variance.

2. Un péage comporte m guichets. On suppose que le nombre N de voitures arrivant en 1 heure suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

On suppose, de plus, que les conducteurs choisissent leur poste au hasard, et que ces choix sont indépendants.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de voitures passant par le poste numéro un.

Déterminer la loi de X puis $E(X)$ et $V(X)$.

3. Une urne contient des boules blanches et noires. On suppose que la probabilité de piocher une blanche vaut $p \in]0, 1[$. On effectue des tirages successifs avec remise.

(a) Soit X_1 la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

Reconnaître la loi de X_1 et donner la valeur de $E(X_1)$ et de $V(X_1)$.

(b) Soit X_2 la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la deuxième boule blanche.

Déterminer la loi de X_2 puis montrer que $E(X_2)$ existe et calculer sa valeur.

4. Soit $\lambda, \mu \in]0, +\infty[$. On considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et Y suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\mu)$. On pose alors $S = X + Y$.

   Déterminer la loi de S.

5. Soit $p \in]0, 1[$, $n, m \in \mathbb{N}$. On considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et telles que X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(m, p)$. On pose alors $S = X + Y$.

   Déterminer la loi de S.

6. Soit $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Considérons X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant toutes les deux une loi géométrique de paramètre p.

   Déterminer la loi de $T = min(X, Y)$.

7. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes, suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

   Quelle est la probabilité que la matrice réelle suivante soit inversible ? diagonalisable ?
$$M = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 1 & Y \end{pmatrix}.$$

8. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes, suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et $q \in]0, 1[$.

   Quelle est la probabilité que la matrice réelle suivante soit diagonalisable ?

$$M = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}.$$