Leçon 35

Fonctions exponentielle et logarithme népérien. Applications.

1 Mon esquisse de plan

Plan

1) Fonctions exponentielle et logarithme népérien

- **Fonction exponentielle népérienne.**

  Existence et unicité de la fonction exponentielle népérienne comme solution du problème de Cauchy $y' = y$ et $y(0) = 1$. Relation fonctionnelle de l'exponentielle. Étude locale de l'exponentielle en 0. Étude asymptotique de l'exponentielle. Variations et courbe représentative de la fonction exponentielle.

- **Fonction logarithme népérien.**

  Définition du logarithme népérien en tant que bijection réciproque de la fonction exponentielle népérienne. Dérivée du logarithme népérien. Relation fonctionnelle du logarithme népérien. Étude locale du logarithme en 1. Étude asymptotique du logarithme. Variations et courbe représentative de la fonction logarithme népérien.

- **Exponentielles et logarithmes en base a.**

  Caractérisation des fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Définition de l'exponentielle en base a. Caractérisation des fonctions continues $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(xy) = f(x) + f(y)$ pour tout couple $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Définition du logarithme en base a. L'exponentielle en base a et le logarithme en base a sont deux fonctions réciproques l'une de l'autre.

- **Fonctions puissances.**

  Définition de la puissance d'un nombre réel strictement positif. Règles de calcul sur les puissances réelles. Étude des fonctions puissances réelles sur $\mathbb{R}_+^*$ et courbes représentatives. Comparaison locale des fonctions logarithmes, puissances, exponentielles.

2) Applications

- **Le nombre e.**

  Calcul approché de e à l'aide des suites $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$.

  Irrationalité de e. Transcendance de e.

- **Fonctions hyperboliques.**

  Définitions de cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique, tangente hyperbolique et cotangente hyperbolique. Étude des fonctions hyperboliques. Formules de trigonométrie hyperboliques. Courbes représentatives des fonctions hyperboliques. Définitions des fonctions hyperboliques réciproques. Expressions logarithmiques des fonctions hyperboliques réciproques. Dérivées des fonctions hyperboliques réciproques.

- **Exponentielle complexe.**

  Définition de l'exponentielle d'un nombre complexe. Relation fonctionnelle de l'exponentielle complexe. Propriétés de l'application $z \in \mathbb{C} \mapsto \exp(z) \in \mathbb{C}^*$ (non injective et surjective).

- **Équations différentielles linéaires du premier et du second ordre.**

  Solutions de l'équation homogène, principe de superposition des solutions, recherche d'une solution particulière.

- **Processus sans mémoire.**

  Une variable aléatoire continue est sans mémoire si et seulement si elle suit une loi exponentielle.

Développements possibles

Propriétés algébriques de l'exponentielle ou du logarithme.
Propriétés des fonctions hyperboliques.
Propriétés de l'exponentielle complexe.

Programmes informatiques possibles

Tracés des courbes représentatives des fonctions de la leçon à l'aide de GeoGebra.
Méthode d'Euler explicite pour obtenir une approximation la courbe représentative de l'exponentielle.
Algorithmes de calcul approché de e.

Propositions d'exercices

La datation au carbone 14.
Le pH d'une solution.
Désintégration de noyaux radioactifs au cours du temps.

Bibliographie

- G. Debeaumarché. Manuel de Mathématiques. Volume 1. Analyse et géométrie différentielle.
- D. Delaunay. Exercices d'analyse.
- X. Gourdon. Les maths en tête. Analyse.
- J.-M. Monier. Analyse 2. Cours et 600 exercices corrigés.

2 Questions

Niveau 1

1. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x réelle :

$$(a)\ x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x \quad (b)\ 2^{2x+3} + 5^{2x} = 5^{2x+1} - 2^{2x+1} \quad (c)\ e^x - 4e^{-x} = 3$$

2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\exp(x) \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $ch(x) \geq 1 + \frac{1}{2}x^2$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$, on pose :

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} ch(a + kb) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} sh(a + kb).$$

   Calculer C_n et S_n.

6. (a) Vérifier que, pour tout a réel, $sh(2a) = 2sh(a)ch(a)$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Exprimer à l'aide de la fonction sinus hyperbolique le produit

$$\prod_{k=1}^{n} ch\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

7. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{1/\sqrt{\ln(x)}}$.

8. Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = -2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' = x + y \\ y' = 3x - y \end{cases}$$

9. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx, \qquad \int_1^e x^n \ln(x)dx, \qquad \int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2x}}{e^x + 1}dx, \qquad \int_{1/2}^2 \frac{\ln(x)}{x}dx.$$

Niveau 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système suivant :

$$\begin{cases} \log_y(x) + \log_x(y) = \dfrac{50}{7} \\ xy = 256 \end{cases}$$

2. Étudier les fonctions $f(x) = xe^{1/x}$ et $g(x) = \exp\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)$

3. Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$, $x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$.

4. (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
   (b) En déduire les limites des suites suivantes :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

5. Montrer que la fonction logarithme n'est pas une fonction rationnelle.

6. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x} \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$.
   (a) Montrer qu'on peut prolonger f en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (b) Quelle est l'allure de la courbe représentative de f au voisinage de 0 ?
7. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.
   (a) Montrer qu'on peut prolonger f en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (b) Quelle est l'allure de la courbe représentative de f au voisinage de 0 ?
8. Démontrer que :
   (a) $\forall x \geq 1$, $argch(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
   (b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $argsh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
   (c) $\forall x \in]-1, 1[$, $argth(x) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.
9. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^n x^n e^{-nx} dx$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n$.