Leçon 5

# Multiples et diviseurs dans $\mathbb{N}$, nombres premiers

## 1 Mon esquisse de plan

### Plan

**1) Multiples et diviseurs dans $\mathbb{N}$**

- **Divisibilité dans $\mathbb{N}$.**

  Définitions multiples et diviseurs. Critères de divisibilité par 3, par 9, par 11...

- **Division euclidienne.**

  Théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$. Application à la numération en base $b$. Application au développement décimal d'un rationnel.

- **PGCD.**

  Existence et unicité du PGCD de deux entiers naturels. Algorithme d'Euclide. Égalité de Bézout. Propriétés du PGCD (homogénéité, associativité).

- **Nombres premiers entre eux.**

  Définition. Théorème de Bezout et de Gauss.

- **PPCM.**

  Existence et unicité du PPCM de deux entiers naturels. Lien entre PGCD et PPCM. Propriétés du PPCM (homogénéité, associativité).

**2) Nombres premiers**

- **Définition et premières propriétés.**

  Définition d'un nombre premier. Tout entier naturel possède au moins un diviseur premier. L'ensemble des nombres premiers est infini. Critère d'Eratosthène. Algorithme de primalité. Divisibilité et nombres premiers.

- **Théorème fondamental de l'arithmétique.**

  Le théorème. Application : $\sqrt{n}$ est irrationnel si l'entier $n$ n'est pas un carré. CNS pour que $a$ divise $b$. Application : nombre de diviseurs d'un entier $a \geq 2$. Expressions du PGCD et du PPCM.

- **Quelques nombres premiers célèbres.**

  Nombres de Fermat, de Mersenne, de Carmichaël...

### Développements possibles

Théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$.
Existence et unicité du PGCD de deux entiers naturels.
Théorème fondamental de l'arithmétique.

### Programmes informatiques possibles

Division euclidienne.
Numération en base $b$.
Algorithme d'Euclide.
Crible d'Eratosthène.
Algorithme de primalité.

### Propositions d'exercices

Juniper Green.
RSA.

### Bibliographie

- B. Bajou, M. Saint-Lannes et X. Sorbe. Mathématiques, épreuve orale d'exposé.
- J. de Biasi. Mathématiques pour le CAPES et l'Agrégation Interne.
- G. Debeaumarché. Manuel de Mathématiques. Volume 2. Algèbre et géométrie.
- D. Delaunay. Exercices d'algèbre et de probabilités.
- X. Gourdon. Les maths en tête. Algèbre.
- D.-J. Mercier. L'Epreuve d'exposé au CAPES mathématiques.

# 2 Questions

## Niveau 1

1. Écrire 123 en base 2.
2. Écrire 365 en base 3.
3. Combien 720 possède-t-il de diviseurs ?
4. Déterminer le PGCD de $n$ et de $n+1$.
5. Déterminer le PGCD de 156, 884 et 1235.
6. Si $a$ est pair et $b$ est impair, a-t-on $a \wedge b = 1$ ?
7. Montrer que 16 et 35 sont premiers entre eux et déterminer un couple d'entiers $(u, v)$ tel que $16u + 35v = 1$.
8. Montrer que 223 est premier.
9. Soit $p$ un nombre premier supérieur à 5.

   Montrer que $p^2 - 1$ est divisible par 24.

## Niveau 2

1. Démontrer que la relation "divise" est une relation d'ordre dans $\mathbb{N}$.
2. Montrer que $a$ divise $b$ si et seulement si $a^2$ divise $b^2$.
3. Résoudre les systèmes suivants, d'inconnus $(a, b) \in \mathbb{N}$ :

$$(S_1) : \left\{ \begin{array}{rcl} ab & = & 1008 \\ a \vee b & = & 168 \end{array} \right. \qquad (S_2) : \left\{ \begin{array}{rcl} a \wedge b & = & 5 \\ a \vee b & = & 60 \end{array} \right. \qquad (S_3) : \left\{ \begin{array}{rcl} a + b & = & 100 \\ a \wedge b & = & 10 \end{array} \right.$$

4. Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
5. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ dont la décomposition en facteur premier s'écrit :

$$n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$$

   avec $p_1, \ldots, p_r$ nombres premiers deux à deux distincts.

   Montrer que la somme $\sigma(n)$ des diviseurs positifs de $n$ vaut :

$$\sigma(n) = \prod_{k=1}^{r} \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}.$$

6. Soient $p$ un nombre premier et $k$ un entier tel que $0 < k < p$.

   Montrer que $p$ divise $\binom{p}{k}$.
7. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n+1$ et $2n+1$ sont premiers entre eux.

   (b) En déduire que $(n+1)$ divise $\binom{2n}{n}$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   Déterminer $n$ entiers naturels consécutifs qui ne sont pas premiers.
9. (a) Montrer que, si $p$, $p+2$, $p+4$ sont premiers, alors $p = 3$.

   (b) En déduire que 5 est le seul nombre premier qui est somme et différence de nombres premiers.
10. Soient $a$ et $n$ deux entiers supérieurs ou égaux à 2. Montrer que, si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et $n$ est premier.
11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $2^n + 1$ est un nombre premier, montrer que $n$ est une puissance de 2.
12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit $F_n = 2^{2^n} + 1$ (nombres de Fermat).

   (a) Montrer que, si $n$ et $m$ sont deux entiers naturels distincts, $F_n \wedge F_m = 1$.

   (b) En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers.