Sujet 1

Le jeu des différences

1 Présentation du jeu

On considère quatre entiers naturels choisi au hasard, par exemple $7, 5, 3, 11$, qu'on met sur la première ligne d'un tableau dans cet ordre:

7	5	3	11

On construit alors successivement les autres lignes du tableau de la façon suivante: à partir des quatre nombres a, b, c, d de la ligne en cours, on écrit les distances $dist(a, b)$, $dist(b, c)$, $dist(c, d)$, $dist(d, a)$ sur la ligne suivante, où par définition, la distance $dist(a, b)$ est $a - b$ si $a \geq b$ et $b - a$ si $b \geq a$.
Avec les nombres choisis ci-dessus, on obtient:

7	5	3	11
2	2	8	4

En continuant à faire les différences ligne par ligne, on a alors le tableau suivant:

7	5	3	11
2	2	8	4
0	6	4	2
6	2	2	2
4	0	0	4
4	0	4	0
4	4	4	4
0	0	0	0

Lorsqu'on obtient une ligne de quatre zéros, on dira que le jeu des différences s'arrête (car ensuite on n'obtiendrait que des zéros).

1. Faire le jeu des différences pour $(2, 11, 4, 8)$ et pour $(3, 3, 12, 1)$.

Une question se pose: le jeu s'arrête-t-il toujours? Pour $(7, 5, 3, 11)$, $(2, 11, 4, 8)$ et $(3, 3, 12, 1)$, c'est normalement bien le cas. Le but de ce qui suit est de comprendre pourquoi.

2 Jeu des différences et opérations

Dans toute cette section, on considère quatre entiers naturels (a, b, c, d) tel que le jeu des différences s'arrête. Comme on l'a vu à la partie 1, il existe bien de tels entiers naturels, par exemple $(7, 5, 3, 11)$, $(2, 11, 4, 8)$ ou $(3, 3, 12, 1)$. On pose alors $N(a, b, c, d)$ le nombre d'étapes qu'il faut pour que le jeu des différences s'arrête en partant des quatre nombres (a, b, c, d). Par exemple, $N(7, 5, 3, 11) = 7$.

2. Montrer que, si k est un entier naturel, alors le jeu des différences s'arrête pour les entiers $(a + k, b + k, c + k, d + k)$ et que:

$$N(a + k, b + k, c + k, d + k) = N(a, b, c, d).$$

3. Montrer que, si k est un entier naturel non nul, alors le jeu des différences s'arrête pour les entiers (ka, kb, kc, kd) et que:
$$N(ka, kb, kc, kd) = N(a, b, c, d).$$

4. Montrer que le jeu des différences s'arrête pour les entiers (b, c, d, a), (c, d, a, b) et (d, a, b, c) et que:
$$N(a, b, c, d) = N(b, c, d, a) = N(c, d, a, b) = N(d, a, b, c).$$

3 Le jeu simplifié avec "pair" et "impair"

Le jeu simplifié consiste à s'intéresser uniquement à la parité des nombres, en utilisant le symbole p pour "pair" et i pour "impair". Par exemple, $(2, 11, 4, 8)$ sera remplacé par (p, i, p, p).
Lorsqu'on effectue une étape du jeu, la distance entre deux nombres pairs (ou entre deux nombres impairs) donnera un nombre pair, et la distance entre un nombre pair et un nombre impair donnera un nombre impair.
Ainsi, les règles du jeu simplifié sont les mêmes que pour le jeu des différences, mais cette fois les nombres a, b, c, d sont remplacés par les symboles p et i et les distances sont définies par:
$$dist(p, i) = dist(i, p) = i \quad \text{et} \quad dist(p, p) = dist(i, i) = p.$$

Voici par exemple le jeu simplifié pour (p, i, p, p):

p	i	p	p
i	i	p	p
p	i	p	i
i	i	i	i
p	p	p	p

Le jeu simplifié s'arrête si on arrive à (p, p, p, p) (car ensuite on obtiendrait toujours (p, p, p, p)).

5. L'avantage du jeu simplifié est qu'il y a un nombre fini de possibilité au départ. Énumérer tous ces cas.

6. Montrer que, dans chacun des cas, le jeu simplifié s'arrête au bout de quatre étapes au maximum. On pourra utiliser la question 4 pour réduire le nombre de cas à traiter.

4 Preuve que le jeu des différences s'arrête

Revenons au cas général. Considérons quatre entiers naturels quelconques (a, b, c, d) et supposons que le jeu des différences pour (a, b, c, d) ne s'arrête jamais.

7. On pose $a' = dist(a, b)$, $b' = dist(b, c)$, $c' = dist(c, d)$, $d' = dist(d, a)$ de sorte que (a', b', c', d') est obtenu à partir de (a, b, c, d) en une étape par le jeu des différences.

   Montrer que:
$$Max(a', b', c', d') \leq Max(a, b, c, d),$$
   où $Max(a, b, c, d)$ et $Max(a', b', c', d')$ sont les maxima de a, b, c, d et a', b', c', d' respectivement (par exemple $Max(7, 5, 3, 11) = 11$).

8. Soit n un entier naturel quelconque. Montrer que au bout de $4n$ étapes du jeu des différences, on obtient des nombres de la forme
$$(2^n a_n, 2^n b_n, 2^n c_n, 2^n d_n),$$
   avec a_n, b_n, c_n, d_n des entiers naturels non tous nuls.

9. En déduire que $2^n \leq Max(a, b, c, d)$.
10. Obtenir une contradiction et conclure.