## Spaghettis et mathématiques

Anthony et Béatrice sont amoureux. Ils se retrouvent le soir de la Saint Valentin dans un restaurant italien autour d'une assiette de spaghettis.

Alors qu'ils mangent tous les deux, le hasard fait qu'ils se retrouvent à chacune des extrémités d'un même spaghetti et provoquent un romantique baiser.

Est-ce vraiment un hasard ou n'y-a-t-il pas une explication mathématique?

Pour répondre à cette question, considérons une assiette de *N* spaghettis, chaque spaghetti ayant bien sûr deux extrémités. Il y a donc 2*N* extrémités de spaghettis et on suppose qu'à chaque instant nos deux amoureux choisissent chacun une extrémité au hasard et mangent chacun de façon simultanée le spaghetti dont l'extrémité a été choisie.



La question est alors la suivante :

Quelle est la probabilité que les deux amoureux se retrouvent aux extrémités d'un même spaghetti et échangent un baiser ?

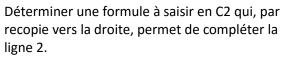
- 1. Supposons dans cette question qu'il y a un nombre N impair de spaghettis dans l'assiette.
  - a. Les amoureux s'embrasseront-t-ils au cours du repas si N = 1, si N = 3 ou si N = 5? Justifier.
  - b. Que peut-on dire plus généralement si N est impair ?
- 2. On suppose désormais qu'il y a un nombre *N* pair de spaghettis dans l'assiette.
  - a. Supposons que Béatrice ait choisi au hasard l'extrémité d'un spaghetti. Combien Anthony a-t-il de chance de choisir l'autre extrémité du spaghetti que Béatrice s'apprête à manger ?
  - b. En déduire que la probabilité qu'il n'y ait pas de baiser échangé au premier spaghetti est égale à :  $\frac{2N-2}{2N-1}$



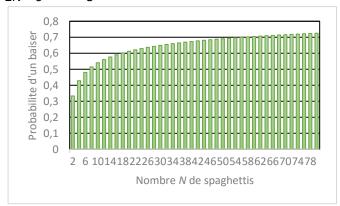
c. En recommençant le raisonnement avec les N-2 spaghettis restants, puis avec les N-4 spaghettis restants et ainsi de suite jusqu'aux 2 derniers spaghettis, montrer que les deux amoureux échangeront un baiser au cours du repas avec une probabilité égale à :

$$1 - \frac{2N-2}{2N-1} \times \frac{2N-6}{2N-5} \times \frac{2N-10}{2N-9} \times \dots \times \frac{2}{3}$$

- d. Le diagramme ci-contre donne la probabilité d'un baiser en fonction du nombre de spaghettis.
  - On admet que la probabilité croit avec le nombre de spaghettis.
  - Combien doit-il y avoir de spaghettis dans l'assiette pour que nos amoureux aient au moins une chance sur deux de s'embrasser?
- e. Pour réaliser ce diagramme, on a utilisé un tableur dont le début est reproduit ci-contre.



On justifiera le démarche utilisée.



	A	В	C	D	E	F	G	Н
1	Nombre de spaghettis	2	4	6	8	10	12	14
2	Probabilité d'un baiser	0,33	0,43	0,48	0,52	0,54	0,56	0,58
3								