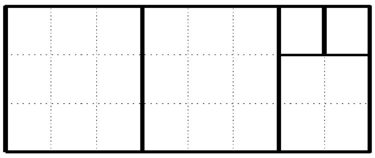
Sujet 2018-19

Des rectangles avec la tête au carré

On considère un rectangle de taille $p \times q$ (la largeur p et la hauteur q étant d'unités entières arbitraires), que l'on désignera dans toute la suite par rectangle (p, q). On souhaite paver ce rectangle en utilisant des carrés de taille arbitraire entière, sans recouvrement (donc deux carrés ne peuvent pas recouvrir une même surface) ni débordement (donc les carrés ne doivent pas dépasser du bord du rectangle). On cherche à déterminer le nombre minimal de carrés noté $N(p, q)$ requis pour le pavage du rectangle (p, q), donnant un pavage dit optimal.



Pavage optimal dans le cas du rectangle $(8, 3)$: on utilise 5 carrés donc $N(8, 3) = 5$.

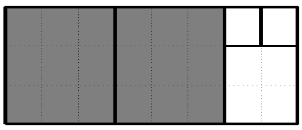
1 Premières propriétés

1. Déterminer $N(p, q)$ pour tous les entiers p et q inférieurs ou égaux à 6. Pour chaque cas, on fera un dessin pour justifier la réponse.

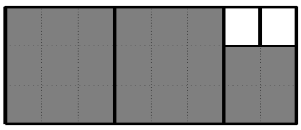
2. Justifier que $N(p, p) = 1$, que $N(p, q) = N(q, p)$ et que $N(p, q) \leq p \times q$.

2 Stratégie gloutonne

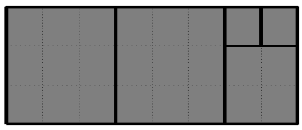
L'une des idées pour paver un rectangle est d'utiliser à chaque étape les carrés les plus grands possibles (on parle alors de stratégie gloutonne). Ce raisonnement repose sur des divisions euclidiennes successives. Par exemple, pour le rectangle $(8, 3)$:



$8 = 2 \times 3 + 2$
Insérer 2 carrés de taille 3



$3 = 1 \times 2 + 1$
Insérer 1 carré de taille 2



$2 = 2 \times 1 + 0$
Insérer 2 carrés de taille 1

3. En utilisant la stratégie gloutonne, déterminer un pavage des rectangles (p, q) pour tous les entiers p et q inférieurs ou égaux à 6.

4. La stratégie gloutonne permet-elle d'obtenir toujours un pavage optimal ? Justifier.

5. Montrer que, avec la stratégie gloutonne, il faut p carrés pour paver le rectangle $(p, p - 1)$.

3 Pavages réductibles

On dit que le pavage du rectangle (p, q) est réductible s'il peut être obtenu à partir de pavages de deux rectangles plus petits mis côte à côte (dans le cas contraire, on parle de pavage irréductible).

6. Donner tous les rectangles (p, q) dont le pavage optimal est réductible, pour tous les entiers p et q inférieurs ou égaux à 6.

7. Déterminer le pavage optimal du rectangle $(13, 11)$ et montrer qu'il est irréductible.