Sujet 2019-20

Juniper Green

Juniper Green est un jeu mathématique créé par Richard Porteous, enseignant à l'école de Juniper Green, auquel le jeu doit son nom.

1 Version à un joueur

Soit N est un entier naturel non nul. Les règles du jeu sont les suivantes :

- On choisit un nombre entier entre 1 et N.
- Une fois qu'un nombre a été choisi, il ne peut plus être joué.
- A partir du second nombre, on doit choisir un nombre entre 1 et N qui est soit un diviseur soit un multiple du nombre précédent.
- On continue ainsi jusqu'à ne plus pouvoir jouer.

1.1 Le cas $N = 20$

On suppose ici que $N = 20$. On joue ainsi avec la liste d'entiers suivante :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

En commençant avec le nombre 12, on peut par exemple faire la suite de coups :

$$12 \to 6 \to 3 \to 18 \to 9 \to 1 \to 8 \to 16 \to 4 \to 20 \to 5 \to 10 \to 2 \to 14 \to 7$$

avec le tableau des nombres choisis ou non en fin de partie :

~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~	~~7~~	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~

La partie s'arrête car il n'y a plus de diviseur ou de multiple de 7 non encore utilisé. Nous avons effectué au total 15 coups au cours de cette partie. Mais est-il possible de faire mieux ?

1. Justifier que les nombres 11, 13, 17 et 19 ne peuvent apparaitre qu'au début ou à la fin d'une suite de coups.
2. En déduire qu'on ne peut pas faire plus de 17 coups au jeu du Juniper Green avec $N = 20$.
3. Proposer une suite de coups de longueur 17.

1.2 Retour au cas général

Revenons au cas général où N est quelconque. On note a_N le nombre maximal de coups possibles à une partie de Juniper Green avec N nombres. On vient par exemple de démontrer que $a_{20} = 17$.

4. Déterminer les valeurs de a_N, pour $N = 1, 2, \ldots, 10$.
5. Démontrer que la suite $(a_N)_{N \geq 1}$ est croissante.
6. Démontrer que, si N tend vers $+\infty$, alors la suite $(a_N)_{N \geq 1}$ tend également vers $+\infty$.

2 Version à deux joueurs

Les règles du jeu sont à peu près les mêmes que pour la version à un joueur :

- Deux joueurs A et B choisissent à tour de rôle un nombre entier entre 1 et N. Le joueur A commence.
- Une fois qu'un nombre a été choisi, il ne peut plus être joué.
- A partir du second nombre, on doit choisir un nombre entre 1 et N qui est soit un diviseur soit un multiple du nombre précédent.
- Le premier joueur qui ne peut plus jouer a perdu.

Voici un exemple de partie dans le cas $N = 20$ où le joueur A perd car il ne peut plus jouer :

Joueur A	7		2		10		15		18		12		8		1		Perdu
Joueur B		14		20		5		3		6		4		16		11	

On cherche à savoir s'il existe une stratégie gagnante pour que le joueur A ou le joueur B remporte la partie à coup sûr.

7. Supposons que $N = 20$.

   (a) Pourquoi le joueur A est-il sûr de gagner la partie s'il commence en choisissant le 11, le 13, le 17 ou le 19 ?

   Pour empêcher cette stratégie gagnante évidente du joueur A, on ajoute une règle du jeu supplémentaire :

   - Le joueur A doit commencer par choisir un numéro pair.

   (b) Pourquoi le joueur A ne doit pas choisir le 2 pour commencer la partie ? Justifier.

8. Supposons que $N = 8$.

   Démontrer que, si le joueur A commence la partie en choisissant le 2, alors il peut gagner la partie à coup sûr.

9. Supposons que $N = 6$.

   Démontrer que, quelque soit le numéro pair choisi par le joueur A pour commencer la partie, il existe toujours une stratégie gagnante pour le joueur B.