Colle 2

Révisions de première année
Compléments sur les suites réelles

L'interrogation orale se déroulera en deux étapes :

- *L'énoncé de définitions et/ou de propriétés du cours et une preuve de cours.*
- *La résolution d'exercices proposés par le professeur colleur.*

Chapitre 0 - Révisions de première année

Sommes et produits

- Notation somme. Opérations sur les sommes. Sommes usuelles. Changement d'indice.
- Notation produit. Opérations sur les produits. Notation factorielle.
- Coefficients binomiaux : définition et propriétés. Formule du binôme de Newton.
- Sommes doubles à indices indépendants ou dépendants. Formule d'interversion des indices.

Suites réelles

- Suites usuelles : arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques et récurrentes linéaires d'ordre 2.
- Étude d'une suite : variations et calcul de la limite.
- Théorèmes de convergence (d'encadrement, des suites monotones, des suites adjacentes...).

Fonctions réelles d'une variable réelle

- Fonctions usuelles : polynômiales (factorisation), rationnelles (factorisation et décomposition en éléments simples), valeur absolue, partie entière, racine carrée, logarithme, exponentielle, puissances.
- Plan d'étude d'une fonction : domaine de définition, parité, limites et asymptotes, continuité, dérivabilité, calcul de la dérivée, tableau de variation, convexité et courbe représentative.
- Bijection et bijection réciproque : définitions, théorème de la bijection, propriétés de la bijection réciproque.

Chapitre 1 - Compléments sur les suites réelles

Rappels sur les suites réelles

- Rappels des différentes définitions possibles d'une suite réelle : explicitement, par récurrence, implicitement, sous forme intégrale.
- Rappels (encore !) sur les théorèmes de convergence vu en première année.

Relations de comparaison des suites réelles

- Négligeabilité : définition, règles de calculs sur les petits-o, croissances comparées.
- Équivalence : définition, lien équivalence/petit-o, équivalents usuelles, opérations sur les équivalents, équivalents et limites.

Suites récurrentes d'ordre 1

- Construction graphique des premiers termes.
- Existence et encadrement des termes de la suite.
- Variations de la suite : cas général, cas où f est croissante et cas où f est décroissante.
- Convergence de la suite : limites finies possibles, convergence dans le cas où f est croissante et dans le cas où f est décroissante, convergence par inégalité des accroissements finis.

Suites implicites

- Du type $f(u_n) = a_n$: définition de la suite, variations, limite.
- Du type $f_n(u_n) = 0$: définition de la suite, variations.

Preuves de cours

Chaque étudiant devra démontrer l'une des propriétés suivantes :

- Si $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$, alors

$$e^{u_n} - 1 \sim u_n, \quad \ln(1+u_n) \sim u_n, \quad (1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n.$$

- Soient (u_n), (v_n), (w_n) et (t_n) quatre suites telles que $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim t_n$. Alors :

$$u_n v_n \sim w_n t_n, \quad \frac{u_n}{v_n} \sim \frac{w_n}{t_n}, \quad u_n^k \sim w_n^k \text{ (où } k \in \mathbb{N}).$$

- Si deux suites (u_n) et (v_n) sont **équivalentes**, alors elles sont de **même nature**, c'est-à-dire :
  - Si $u_n \sim v_n$ et si (v_n) converge vers un réel ℓ, alors (u_n) converge également vers ℓ.
  - Si $u_n \sim v_n$ et si (v_n) diverge vers $\pm\infty$, alors (u_n) diverge également vers $\pm\infty$.

- Soit f une fonction, J un intervalle stable par f et (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 \in J \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

  Si f est **continue** sur J et si (u_n) converge vers $\ell \in J$, alors $f(\ell) = \ell$.

Prochain programme : *Calcul matriciel - Espaces probabilisés*