Colle 4

Calcul matriciel - Espaces probabilisés

L'interrogation orale se déroulera en deux étapes :

- *L'énoncé de définitions et/ou de propriétés du cours et une preuve de cours.*
- *La résolution d'exercices proposés par le professeur colleur.*

Chapitre 2 - Calcul matriciel

Rappels et compléments sur le calcul matriciel

- Opérations sur les matrices : somme, produit par un scalaire, produit matriciel, transposition.
- Puissances d'une matrice carrée, polynôme d'une matrice carrée, polynôme annulateur.

  Calcul de la puissance d'une matrice carrée par récurrence, avec la formule du binôme, à l'aide d'un polynôme annulateur ou en se ramenant à une matrice diagonale.
- Matrices inversibles : définition et caractérisations.

  Calcul de l'inverse d'une matrice carrée en utilisant la définition (si l'inverse est suggéré), un polynôme annulateur ou la méthode du pivot de Gauss.

Réduction des matrices carrées

- Valeur propre et vecteur propre associé. Spectre d'une matrice.

  Calcul des valeurs propres de d'une matrice carrée en utilisant la définition (si un vecteur propre est suggéré), un polynôme annulateur ou la méthode du pivot de Gauss.
- Sous-espaces propres.

  Calcul des vecteurs propres associé à une valeur propre en déterminant une base du sous espace propre.
- Matrices sembles, matrices diagonalisables.
- Diagonalisation d'une matrice carrée : une matrice est diagonalisable s'il existe une base de vecteurs propres.
- Applications de la réduction : calculs des puissances d'une matrice, résolution d'équations matricielles.

Chapitre 3 - Espaces probabilisés

Espaces probabilisés

- Définition d'un espace probabilisable. Tribu des événements.

  Aucun raisonnement théorique autour de la notion de tribu n'est exigible des étudiants.
- Espaces probabilisés : définition et propriétés d'une probabilité. Événements quasi-certains, événements quasi-impossibles.
- Probabilités conditionnelles : définition et propriétés.

Calculs de probabilités

- Probabilité d'une union finie : lorsque les événements sont deux à deux incompatibles ou non.
- Probabilité d'une union infinie : lorsque les événements sont deux à deux incompatibles ou en utilisant la propriété de la limite monotone.
- Probabilité d'une intersection finie : lorsque les événements sont mutuellement indépendants ou en utilisant la formule des probabilités composées.
- Probabilité d'une intersection infinie : en utilisant la propriété de la limite monotone.
- Système complet ou quasi-complet d'événements. Formule des probabilités totales.

Preuves de cours

Chaque étudiant devra démontrer l'une des propriétés suivantes :

- Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Les matrices $P(A)$ et $Q(A)$ commutent :
$$P(A) \times Q(A) = Q(A) \times P(A).$$
- Les valeurs propres d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont les réels λ tels que la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.
- Si $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme annulateur d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors les valeurs propres possibles de A sont les racines de P.
- Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé. Alors :
  1. Pour tout $A \in \mathscr{A}$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
  2. Si $A, B \in \mathscr{A}$ sont deux événements tels que $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$.
  3. Si $A, B \in \mathscr{A}$, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Prochain programme : *Compléments sur les séries réelles - Espaces vectoriels*