Révisions 2

Sujet ECRICOME

Exercice 1 (ECRICOME 2017)

Dans tout l'exercice, on notera $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et I la matrice identité d'ordre 3. On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

Partie A : Étude de la matrice A

1. Calculer les matrices $(A-I)^2$ et $(A-I)^3$.
2. En déduire l'ensemble des valeurs propres de A.
3. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

Partie B : Recherche d'une solution particulière

On note pour tout $x \in]-1,1[$, $\varphi(x) = \sqrt{1+x}$.

4. Justifier que φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1,1[$, et déterminer les valeurs de $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.
5. En utilisant la formule de Taylor-Young pour φ en 0 à l'ordre 2, déterminer un réel α non nul tel que :
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$
6. Soit $P(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2$ la fonction polynomiale de degré 2 ainsi obtenue. Développer $(P(x))^2$.
7. Soit $C = A - I$. En utilisant les résultats de la question 1, vérifier que $(P(C))^2 = A$.
   Expliciter alors une matrice M telle que $M^2 = A$.

Partie C : Résolution complète de l'équation

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice A.

Dans cette partie, on pose : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Soient u, v et w les vecteurs définis par : $\begin{cases} w = (1,0,1), \\ v = f(w) - w, \\ u = f(v) - v. \end{cases}$
   (a) Calculer les vecteurs v et u.
   On pourra admettre pour la suite que $v = (1,1,-3)$ *et* $u = (-6,-6,0)$.
   (b) Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$.
   (d) En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $T = P^{-1}AP$.
9. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que si $N^2 = T$, alors $NT = TN$. En déduire alors que N est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

où a, b et c sont trois réels.

(b) Démontrer alors que l'équation matricielle $N^2 = T$ admet exactement deux solutions : N_1 et N_2.

10. Montrer que l'équation matricielle $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ admet exactement deux solutions que l'on écrira en fonction de P, P^{-1}, N_1 et N_2.

11. L'ensemble E des matrices M appartenant à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ est-il un espace vectoriel ?

Exercice 2 ([ECRICOME 2020)

Pour tout entier naturel non nul, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \geq 0,\ f_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt.$$

Partie A : Étude de la fonction f_n

Dans cette partie, on fixe un entier naturel n non nul.

1. Démontrer que la fonction f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \geq 0,\ f_n'(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}.$$

2. Étudier les variations de f_n.

3. Démontrer que f_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$, et calculer sa dérivée seconde.

   En déduire que f_n est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

4. (a) Démontrer : $\forall t \geq 1,\ t^{2n} - 1 \ \geq\ n\,(t^2 - 1)$.

   (b) Montrer alors : $\forall x \geq 1,\ f_n(x) \ \geq\ f_n(1) + \dfrac{n}{2}\,(x - 1)^2$.

   (c) En déduire la limite de $f_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5. Calculer $f_n(0)$, puis démontrer : $f_n(1) < 0$.

6. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive, et que cette solution est strictement supérieure à 1.

   On note x_n cette solution.

Partie B : Étude d'une suite implicite

On étudie dans cette partie le comportement de la suite (x_n), où pour tout entier naturel n non nul, x_n est l'unique solution strictement positive de l'équation : $f_n(x) = 0$.

On admettra que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \geq \frac{2n + 2}{2n + 1}.$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(x) - f_n(x) \ =\ x^{2n+1}\ \left(\frac{x}{2n + 2} - \frac{1}{2n + 1}\right)$$

8. (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \geq \dfrac{2n+2}{2n+1}$, $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$.
   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x_n) \geq 0$.
   (c) Montrer alors que la suite (x_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente.
9. (a) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$: $-\ln(2) \leq f_n(1) \leq 0$.
   (b) À l'aide de l'inégalité démontrée à la question 4.(b) de la partie A, montrer alors :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq x_n - 1 \leq \sqrt{\frac{2\ln(2)}{n}}$$
   Quelle est la limite de x_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Partie C : Étude d'une fonction de deux variables
Dans cette partie, on fixe à nouveau un entier naturel n non nul.
L'objectif de cette partie est d'étudier la fonction G_n définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$G_n : (x, y) \mapsto f_n(x) \times f_n(y)$$

10. Justifier que la fonction G_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et calculer ses dérivées partielles premières.
11. Déterminer l'ensemble des points critiques de G_n.
12. Calculer la matrice hessienne de G_n au point (x_n, x_n) puis au point $(1, 1)$.
13. La fonction G_n admet-elle un extremum local en (x_n, x_n) ?
    Si oui, donner la nature de cet extremum.
14. La fonction G_n admet-elle un extremum local en $(1, 1)$?
    Si oui, donner la nature de cet extremum.

Exercice 3 (ECRICOME 2020)
Soit a un réel strictement positif.

1. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose :
   $$I_n(a) = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt$$
   Montrer que l'intégrale $I_n(a)$ converge et vaut $\dfrac{1}{(n-1)\, a^{n-1}}$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < a, \\ \dfrac{3a^3}{t^4} & \text{si } t \geq a. \end{cases}$$
   (a) Démontrer que f est bien une densité de probabilité.
   Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.
   (b) Donner la fonction de répartition de X.
   (c) Démontrer que X admet une espérance et calculer cette espérance.
   (d) Démontrer que X admet une variance et que celle-ci vaut $\dfrac{3\,a^2}{4}$.

3. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1]$. On pose : $Y = \dfrac{a}{U^{\frac{1}{3}}}$.

   (a) Déterminer $Y(\Omega)$.

   (b) Déterminer la fonction de répartition de Y et vérifier que Y et X suivent la même loi.

   (c) Écrire une fonction en langage `Python` d'en-tête : `def simulX(a, m, n)` prenant en argument un réel a strictement positif et deux entiers naturels m et n non nuls, qui renvoie une matrice à m lignes et n colonnes dont chaque coefficient est un réel choisi de façon aléatoire en suivant la loi de X. Ces réels seront choisis de façon indépendante.
   À cet effet, on rappelle que si m et n sont des entiers naturels non nuls, l'instruction : `rd.random([m, n])` renvoie une matrice à m lignes et n colonnes dont chaque coefficient suit la loi uniforme sur $]0,1]$, ces coefficients étant choisis de façon indépendantes.

4. (a) Calculer $P(X > 2a)$.

   (b) Calculer $P_{(X>2a)}(X > 6a)$.

   (c) On suppose que la fonction `Python` de la question 3.(a) a été programmée correctement. Compléter le script ci-dessous afin qu'il renvoie une valeur permettant de vérifier le résultat de la question précédente.

```
a = 10
N = 100000
s1 = 0
s2 = 0
X = simulX(a,1,N)
for k in range(1, N+1):
    if ..... :
        s1 = s1+1
        if X(k) > 6*a:
            .....
if s1>0:
    print( ..... )
```

On cherche dans la suite de l'exercice à estimer le paramètre a.
Soit n un entier naturel non nul, et X_1, ..., X_n, n variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la même loi que X.

5. On pose : $V_n = \dfrac{2}{3n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

   (a) Montrer que $E(V_n) = a$.

   (b) Vérifier que $V(V_n) = \dfrac{a^2}{3n}$.

6. On pose : $W_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

   (a) Déterminer la fonction de répartition de W_n et vérifier que W_n est bien une variable aléatoire à densité.

   (b) Montrer que W_n admet pour densité la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < a, \\ \dfrac{3na^{3n}}{t^{3n+1}} & \text{si } t \geq a. \end{cases}$$

   (c) Démontrer que W_n admet une espérance et calculer cette espérance.
   Déterminer alors l'unique réel λ_n dépendant de n tel que $E(\lambda_n W_n) = a$.

(d) Calculer la variance de $\lambda_n W_n$ et vérifier que celui-ci vaut $\dfrac{a^2}{3n\,(3n-2)}$.

7. (a) Compléter la fonction ci-dessous afin qu'elle réalise m simulations de la variable aléatoire V_n et renvoie les résultats obtenus sous forme d'une matrice ligne à m éléments :

```
def simulV(a,m,n):
    X = simulX(a, m, n)
    V = np.zeros(m)
    for k in range(m):
        V[k] = .....
    return(V)
```

Pour la suite, on prend $n = 100$ et on suppose que l'on dispose d'une fonction similaire `simulW` permettant d'obtenir m simulations de la variable aléatoire $\lambda_n W_n$.

(b) Compléter les lignes ci-dessous pour écrire le script qui a permis d'obtenir le graphique présenté :

```
W = simulW( ..... , ..... , ..... )
V = simulV( ..... , ..... , ..... )
n = np.arange(1, 21, 1)
plt.plot(n, ..... , "+") #tracé avec des +
plt.plot(n, ..... , "x") #tracé avec des x
```

On justifiera la réponse pour les deux dernière lignes.