Révisions 3

# Sujet ECRICOME

## Exercice 1 (ECRICOME 2006)

$E$ désigne l'espace des fonctions polynômes à coefficients réels, dont le degré est inférieur ou égal à l'entier naturel 2.

### Partie I : Étude d'un endomorphisme de $E$.

On considère l'application $f$ qui, à tout élément $P$ de $E$ associe la fonction polynôme $Q$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = (x-1)P'(x) + P(x),$$

et $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $E$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x \quad \text{et} \quad P_2(x) = x^2.$$

1. Montrer que $f$ est un endomorphisme de $E$.
2. Vérifier que la matrice $A$ de $f$ dans $\mathcal{B}$, s'écrit sous la forme :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
3. $f$ est-il un automorphisme de $E$ ?
4. Déterminer l'image par $f$ des fonctions polynômes $R_0$, $R_1$, $R_2$ définies par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad R_0(x) = 1, \quad R_1(x) = x-1 \quad \text{et} \quad R_2(x) = (x-1)^2.$$
5. Montrer que $\mathcal{B}' = (R_0, R_1, R_2)$ est une base de $E$.
6. Écrire la matrice de passage $P$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ ainsi que la matrice $D$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}'$.
7. Vérifier que pour tout réel $x$,
$$\begin{cases} R_2(x) + 2R_1(x) + R_0(x) = P_2(x) \\ R_1(x) + R_0(x) = P_1(x) \end{cases}$$
En déduire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.
8. Écrire $A^{-1}$ en fonction de $D^{-1}$ puis démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$,
$$\left[A^{-1}\right]^n = P\left[D^{-1}\right]^n P^{-1}$$
et expliciter enfin la matrice $\left[A^{-1}\right]^n$.

### Partie II : Une chaîne de Markov.

On dispose d'une urne qui contient trois boules numérotées de 0 à 2. On s'intéresse à une suite d'épreuves définies de la manière suivante :

- La première épreuve consiste à choisir au hasard une boule dans cette urne.
- Si $j$ est le numéro de la boule tirée, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à $j$, le tirage suivant se faisant alors dans l'urne ne contenant plus que les boules numérotées de 0 à $j$.

On considère alors la variable aléatoire réelle $X_k$ égale au numéro de la boule obtenue à la $k$-ième épreuve ($k \geq 1$). On note alors $U_k$ la matrice ligne définie par :

$$U_k = \begin{pmatrix} P(X_k = 0) & P(X_k = 1) & P(X_k = 2) \end{pmatrix}$$

où $P(X_k = j)$ est la probabilité de tirer la boule numéro $j$ à la $k$-ième épreuve. On convient que $X_0$ suit la loi certaine égale à 2 et on a donc :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Tracer le graphe probabiliste associé à la chaîne de Markov $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Donner la matrice de transition $B$ associée et exprimer $B$ à l'aide de $A^{-1}$.
10. Reconnaître la loi de $X_1$. Donner son espérance et sa variance.
11. Déterminer la loi de $X_2$. Calculer son espérance et sa variance.
12. Prouver que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad U_{k+1} = U_k B$.
13. En déduire une expression de $U_k$ en fonction de $U_0$, $B$ et $k$.
14. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner la loi de $X_k$ et vérifier que l'on a :

$$\lim_{k\to+\infty} P(X_k = 0) = 1, \quad \lim_{k\to+\infty} P(X_k = 1) = 0, \quad \lim_{k\to+\infty} P(X_k = 2) = 0.$$

15. On rappelle que la commande `rd.randint(a, b+1)` retourne un nombre choisi aléatoirement suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([\![a, b]\!])$.

    Compléter le programme `Python` suivant pour qu'il simule $k$ étapes de l'expérience décrite dans l'énoncé et retourne la valeur de $X_k$ :

```python
def simulX(k):
    X = 2
    for i in range(k):
        X = .....
    return(X)
```

16. On considère les instructions suivantes :

```python
S = []
for i in range(10000):
    S.append(simulX(100))
L = [S.count(i)/10000 for j in range(3)]
print(L)
```

    Que contient la variable `S` à l'issue des 10000 passages dans la boucle `for` ? Que contient la variable `L` ? Quel résultat peut-on s'attendre à avoir ?

---

## Exercice 2 (ECRICOME 2005)

On considère, pour tout entier naturel $n$, l'application $\varphi_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x},$$

ainsi que l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx.$$

On se propose de démontrer l'existence de trois réels $a$, $b$, $c$ tels que :

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(n) \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0.$$

1. Calculer $I_0$ et $I_1$.
2. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer le signe de $I_n$ pour tout entier naturel $n$.
4. Qu'en déduit-on pour la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?
5. Majorer la fonction $g : x \to e^{-2x}$ sur $[0,1]$.
6. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
7. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $n$ tend vers l'infini.
8. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2I_{n+1} = 1 - (n+1)\, I_n$.
9. En déduire la limite de la suite $(n\, I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $n$ tend vers l'infini.
10. Déterminer la limite de la suite $(n\,(n\, I_n - 1))_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $n$ tend vers l'infini.
11. Donner alors les valeurs de $a$, $b$, $c$.

---

## Exercice 3 (ECRICOME 2019)

On suppose que toutes les variables aléatoires présentées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé.

### Partie A

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^3} & \text{si } t \geq 1, \\ 0 & \text{si } \ -1 < t < 1, \\ -\dfrac{1}{t^3} & \text{si } t \leq -1. \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction $f$ est paire.
2. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ converge et calculer sa valeur.
3. (a) À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout réel $A$ strictement supérieur à 1, on a :
$$\int_{-A}^{-1} f(t)\, dt = \int_1^A f(u)\, du.$$
En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\, dt$ converge et donner sa valeur.
   (b) Montrer que la fonction $f$ est une densité de probabilité.
4. On considère une variable aléatoire $X$ admettant $f$ pour densité. On note $F_X$ la fonction de répartition de $X$.

(a) Montrer que, pour tout réel $x$, on a :

$$F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \leq -1, \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1, \\ 1 - \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

(b) Démontrer que $X$ admet une espérance, puis que cette espérance est nulle.

(c) La variable aléatoire $X$ admet-elle une variance ?

5. Soit $Y$ la variable aléatoire définie par $Y = |X|$.

   (a) Donner la fonction de répartition de $Y$, puis montrer que $Y$ est une variable aléatoire à densité.

   (b) Montrer que $Y$ admet pour densité la fonction $f_Y$ définie par :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   (c) Montrer que $Y$ admet une espérance et la calculer.

**Partie B**

6. Soit $D$ une variable aléatoire prenant les valeurs $-1$ et $1$ avec équiprobabilité, indépendante de la variable aléatoire $Y$. Soit $T$ la variable aléatoire définie par $T = DY$.

   (a) Déterminer la loi de la variable $Z = \dfrac{D+1}{2}$. En déduire l'espérance et la variance de $D$.

   (b) Justifier que $T$ admet une espérance et préciser sa valeur.

   (c) Montrer que pour tout réel $x$, on a :

$$P(T \leq x) = \frac{1}{2}\, P(Y \leq x) + \frac{1}{2}\, P(Y \geq -x).$$

   (d) En déduire la fonction de répartition de $T$.

7. Soit $U$ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1[$ et $V$ la variable aléatoire définie par :

$$V = \frac{1}{\sqrt{1-U}}.$$

   (a) Rappeler la fonction de répartition de $U$.

   (b) Déterminer la fonction de répartition de $V$ et vérifier que les variables $V$ et $Y$ suivent la même loi.

8. (a) Écrire une fonction en langage `Python`, d'en-tête `def D(n)`, qui prend un entier $n \geq 1$ en entrée, et renvoie une matrice ligne contenant $n$ réalisations de la variable aléatoire $D$.

   (b) On considère le script suivant :

```
n = input(`entrer n `)
a = D(n)
b = rd.random(n)
c = a/np.sqrt(1-b)
print(np.sum(c)/n)
```

   De quelle variable aléatoire les coefficients du vecteur `c` sont-ils une simulation ? Pour `n` assez grand, quelle sera la valeur affichée ? Justifier votre réponse.