

Sujet EDHEC

Exercice 1 (EDHEC 2017)

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on rappelle que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de E , les fonctions e_0, e_1, e_2 étant définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e_0(t) = 1, \quad e_1(t) = t, \quad e_2(t) = t^2.$$

On considère l'application φ qui, à toute fonction P de E , associe la fonction, notée $\varphi(P)$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\varphi(P))(x) = \int_0^1 P(x+t) dt.$$

1. (a) Montrer que φ est linéaire.
- (b) Déterminer $(\varphi(e_0))(x)$, $(\varphi(e_1))(x)$ et $(\varphi(e_2))(x)$ en fonction de x , puis écrire $\varphi(e_0)$, $\varphi(e_1)$ et $\varphi(e_2)$ comme combinaison linéaire de e_0, e_1 et e_2 .
- (c) Dédire des questions précédentes que φ est un endomorphisme de E .
2. (a) Écrire la matrice A de φ dans la base (e_0, e_1, e_2) . On vérifiera que la première ligne de A est :

$$\left(1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \right).$$

- (b) Justifier que φ est un automorphisme de E .
- (c) La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Compléter les commandes **Python** suivantes pour que soit affichée la matrice A^n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur :

```

1 | n = input('entrez une valeur pour n : ')
2 | A = .....
3 | print( ..... )

```

4. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , il existe un réel u_n tel que l'on ait :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donner u_0 et établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(3n+2)$.

- (b) En déduire, par sommation, l'expression de u_n pour tout entier n .
- (c) Écrire A^n sous forme de tableau matriciel.

Exercice 2 (EDHEC 2016)

Pour chaque entier naturel n , on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in [n, +\infty[, \quad f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}} dt.$$

1. Étude de f_n .

- (a) Montrer que f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur $[n, +\infty[$ puis déterminer $f'_n(x)$ pour tout x de $[n, +\infty[$. Donner le sens de variation de f_n .
- (b) En minorant $f_n(x)$, établir que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$.
- (c) En déduire que, pour chaque entier naturel n , il existe un unique réel, noté u_n , élément de $[n, +\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$.

2. Étude de la suite (u_n) .

- (a) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$.

3. (a) Utiliser la question 2.(b) pour compléter les commandes Python suivantes afin qu'elles permettent d'afficher un entier naturel n pour lequel $u_n - n$ est inférieur ou égal à 10^{-4} .

```

1 | n = 0
2 | while ..... :
3 |     n = .....
4 | print(n)
    
```

- (b) Le script affiche l'une des trois valeurs $n = 55$, $n = 70$ et $n = 85$. Préciser laquelle en prenant 2, 3 comme valeur approchée de $\ln(10)$.

4. On pose $v_n = u_n - n$.

- (a) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.
- (b) Établir que : $\forall x \geq 1, \quad \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.
- (c) Vérifier ensuite que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$.
- (d) Déduire de l'encadrement obtenu en 2.(b) que : $u_n - n \underset{+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}$.

Exercice 3 (EDHEC 2010)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- 1. (a) Vérifier que f est une fonction paire.
- (b) Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

Dans la suite, on considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , admettant f comme densité. On note F_X la fonction de répartition de X .

- 2. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?
- 3. On pose $Y = \ln(|X|)$ et on admet que Y est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . On note F_Y sa fonction de répartition.
 - (a) Montrer que, pour tout réel x , on a : $F_Y(x) = F_X(e^x) - F_X(-e^x)$.
 - (b) Sans expliciter la fonction F_Y , justifier que Y est une variable aléatoire à densité.

- (c) Soit f_Y est une densité de Y . Montrer que pour tout réel x sauf peut-être en un nombre fini de points, on a : $f_Y(x) = 2e^x f(e^x)$.
- (d) Expliciter f_Y puis reconnaître la loi de Y . En déduire sans calcul son espérance et sa variance.
4. (a) Montrer que, si x est positif, alors $1 - e^{-x}$ appartient à $[0, 1[$ et montrer que, si x est strictement négatif, alors $1 - e^{-x}$ est strictement négatif.
- (b) On considère une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z = -\ln(1 - U)$ et reconnaître la loi de Z .
- (c) On rappelle qu'en Python, la fonction `rd.random()` permet de simuler la loi uniforme sur $]0, 1[$. Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire Y :

```

1 | def simulY():
2 |     y = .....
3 |     return(y)

```

Exercice 4 (EDHEC 2017)

Partie I : étude d'une variable aléatoire

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3 et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1.

Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Au départ, c'est à dire à l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1.
- Lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout n de \mathbb{N} , on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le mobile à l'instant n . D'après le premier des deux points précédents, on a donc $X_0 = 1$.

1. Donner la loi de X_1 , ainsi que l'espérance $E(X_1)$ de la variable aléatoire X_1 .

On admet pour la suite que la loi de X_2 est donnée par :

$$P(X_2 = 1) = \frac{1}{3}, P(X_2 = 2) = P(X_2 = 3) = P(X_2 = 4) = \frac{2}{9}.$$

2. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, donner, en justifiant, l'ensemble des valeurs prises par X_n .
3. (a) Utiliser la formule des probabilités totales pour établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3} (P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)).$$

- (b) Vérifier que cette relation reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.
- (c) Justifier que, pour tout n de \mathbb{N} : $P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1$.
En déduire l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X_{n+1} = 1) = -\frac{1}{3}P(X_n = 1) + \frac{1}{3}$$

(d) Établir alors que : $\forall n \in \mathbb{N}, P(X_n = 1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

4. (a) En procédant de la même façon qu'à la question précédente, montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3} (P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)).$$

(b) En déduire une relation entre $P(X_{n+1} = 2)$ et $P(X_n = 2)$.

(c) Montrer enfin que : $\forall n \in \mathbb{N}, P(X_n = 2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

5. On admet que, pour tout entier naturel n , on a :

$$P(X_{n+1} = 3) = -\frac{1}{3}P(X_n = 3) + \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(X_{n+1} = 4) = -\frac{1}{3}P(X_n = 4) + \frac{1}{3}.$$

En déduire sans calcul que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X_n = 3) = P(X_n = 4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

6. Déterminer, pour tout entier naturel n , l'espérance $E(X_n)$ de la variable aléatoire X_n .

Partie 2 : calcul des puissances d'une matrice A

Pour tout n de \mathbb{N} , on considère la matrice ligne de $\mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$:

$$U_n = (P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2) \quad P(X_n = 3) \quad P(X_n = 4)).$$

7. (a) Montrer (grâce à certains résultats de la partie 1) que, si l'on pose $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n A$$

(b) Établir par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 A^n.$$

(c) En déduire la première ligne de A^n .

8. Expliquer comment choisir la position du mobile au départ pour trouver les trois autres lignes de la matrice A^n , puis écrire ces trois lignes.

Partie 3 : une deuxième méthode de calcul des puissances de A

On considère les matrices I et J suivantes : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Déterminer les réels a et b tels que $A = aI + bJ$.

10. (a) Calculer J^2 puis établir que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $J^k = 4^{k-1}J$.

(b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, en déduire, pour tout entier naturel non nul, l'expression de A^n comme combinaison linéaire de I et de J .

(c) Vérifier que l'expression trouvée reste vraie pour $n = 0$.

Partie 4 : informatique

11. (a) Expliquer soigneusement ce que fait la fonction Python suivante lorsqu'on lui donne en entrée une valeur $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$:

```
1 | def deplacement(i):  
2 |     S = [k for k in range(1, 5) if k != i]  
3 |     r = rd.randint(3)  
4 |     return(S[r])
```

- (b) Compléter le script Python suivant pour qu'il affiche les 100 premières positions du mobile dont le voyage est étudié dans ce problème, ainsi que le nombre de fois n où il est revenu sur le sommet numéroté 1 au cours des 100 premiers instants.

```
1 | x = np.zeros(100)  
2 | x[0] = 1  
3 | for k in range(1,100):  
4 |     x[k] = deplacement( .... )  
5 | n = np.sum( ..... )  
6 | print(x, n)
```

- (c) Après avoir exécuté cinq fois ce script, les réponses concernant le nombre de fois où le mobile est revenu sur le sommet 1 sont $n = 23$, $n = 28$, $n = 25$, et $n = 26$. En quoi est-ce normal ?
-