Révisions 7

Sujet EML

Exercice 1 (EML 2023 - Sujet zéro)

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Le but de cette question est de diagonaliser la matrice A.
   (a) Justifier que la matrice A est de rang 1.
   (b) En déduire une valeur propre de A ainsi qu'une base du sous-espace propre associé.
   (c) Justifier que 6 est valeur propre de A et qu'un vecteur propre associé est $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   (d) Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

2. Résoudre le système différentiel :

$$(SH) : \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x + 2y - z \\ y' & = & 2x + 4y - 2z \\ z' & = & -x - 2y + z \end{array} \right.$$

3. Soient $X_1 : t \mapsto X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix}$ et $X_2 : t \mapsto X_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$ deux solutions du système (SH).

   On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ vérifiant $X_1(t_0) = X_2(t_0)$. Que pouvez-vous dire de X_1 et X_2 ?

4. (a) Déterminer la solution $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ du système (SH) vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (b) Déterminer la solution $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ du système (SH) vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. Dans cette question on considère trois fonctions continues $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On s'intéresse au système différentiel :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x + 2y - z + a(t) \\ y' & = & 2x + 4y - 2z + b(t) \\ z' & = & -x - 2y + z + c(t) \end{array} \right.$$

   où x, y et z sont des fonctions de classe C^1, inconnues, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de la variable réelle t.

   Une solution de (S) sur $\mathbb{R}$ est une application $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ où x, y et z sont des fonctions de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout t réel, on ait :

$$\begin{cases} x'(t) & = x(t) + 2y(t) - z(t) + a(t) \\ y'(t) & = 2x(t) + 4y(t) - 2z(t) + b(t) \\ z'(t) & = -x(t) - 2y(t) + z(t) + c(t) \end{cases}.$$

(a) Préciser quel vecteur colonne $B(t) \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dépendant de la variable réelle t permet d'écrire le système (S) sous la forme :

$$(S) : \ X' = AX + B(t).$$

(b) Soit Y une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de (S). Démontrer que $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ est solution de (S) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $Z : t \mapsto X(t) - Y(t)$ est solution de (SH) sur $\mathbb{R}$, (SH) désignant le système de la question 2.

(c) Dans cette question, on pose pour $t \in \mathbb{R}$: $a(t) = 1$, $b(t) = 2(1 - e^t)$, $c(t) = e^t - 1$.

Démontrer que $Y : t \mapsto Y(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est solution de (S) sur $\mathbb{R}$.

En déduire toutes les solutions du système différentiel (S) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (EML 2019)

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad f(t) = t + \frac{1}{t}.$$

Partie A : Étude d'une fonction d'une variable

1. Étudier les variations de la fonction f sur $]0, +\infty[$.

   Dresser le tableau des variations de f en précisant les limites en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers $[2, +\infty[$.

On note $g : [2, +\infty[\to [1, +\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de f à $[1, +\infty[$.

3. (a) Dresser le tableau de variations de g.

   (b) Justifier que la fonction g est dérivable sur $]2, +\infty[$.

   (c) Soit $y \in [2, +\infty[$. En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation $f(t) = y$ d'inconnue $t \in]0, +\infty[$.

   En déduire une expression de $g(y)$ en fonction de y.

Partie B : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction h de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $U =]0; +\infty[\times]0; +\infty[$ définie par :

$$\forall (x, y) \in U, \quad h(x, y) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) (1 + x)(1 + y).$$

4. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de h en tout $(x, y) \in U$.

5. Soit $(x, y) \in U$. Montrer :

$$(x, y) \text{ est un point critique de } h \quad \iff \quad \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}.$$

6. En déduire que h admet un unique point critique sur U dont on précisera les coordonnées (a, b).

7. (a) Vérifier : $\forall (x, y) \in U, \quad h(x, y) = 2 + f(x) + f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right)$.

(b) En déduire que h admet en (a, b) un minimum global sur U.

Partie C : Étude d'une suite

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} = \frac{1}{n} f(nu_n).$$

8. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \geq 1$.

9. Recopier et compléter les lignes 3 et 4 de la fonction `Python` suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie la valeur de u_n.

```
1 def suite(n):
2     u  = 1
3     for k in range( ..... ):
4         u = .....
5     return(u)
```

10. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

 (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq v_n \leq \dfrac{1}{n^2}$.

 (b) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$.

 (c) Calculer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} v_k$.

 En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ, que l'on ne cherchera pas à déterminer.

11. (a) Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a : $\dfrac{1}{k^2} \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2} dt$.

 (b) Pour tous entiers n et p tels que $2 \leq p < n$, calculer $\displaystyle\sum_{k=p}^{n-1} v_k$ et en déduire :

$$0 \leq u_n - u_p \leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} dt.$$

 (c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $u_2 \leq u_n \leq 1 + u_2$.
 Montrer alors que ℓ appartient à l'intervalle $[2, 3]$.

 (d) Montrer, pour tout entier p supérieur ou égal à 2 :

$$0 \leq \ell - u_p \leq \frac{1}{p-1}.$$

 (e) En déduire une fonction `Python` qui renvoie une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.

Exercice 3 (EML 2019)

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Partie A : Des résultats préliminaires

Soient U et V deux variables aléatoires à densité indépendantes, de densités respectives f_U et f_V, et de fonctions de répartition respectives F_U et F_V.
On suppose que les fonctions f_U et f_V sont nulles sur $]-\infty;0[$ et continues sur $[0;+\infty[$.

1. (a) Justifier : $\forall t \in [0;+\infty[,\ 0 \leq F_U(t)f_V(t) \leq f_V(t)$.

   (b) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_U(t)f_V(t)dt$ converge.

On admet le résultat suivant :

$$\int_0^{+\infty} F_U(t)f_V(t)dt = P(U \leq V).$$

2. En déduire : $P(U > V) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_U(t))f_V(t)dt$.

3. **Exemple :** Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose dans cette question que U suit la loi exponentielle de paramètre λ et que V suit la loi exponentielle de paramètre μ.

   (a) Rappeler, pour tout t de $\mathbb{R}_+$, une expression de $F_U(t)$ et de $f_V(t)$.

   (b) En déduire : $P(U > V) = \dfrac{\mu}{\lambda + \mu}$.

Partie B : Une application

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On considère $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ.
On définit ensuite la variable N égale au plus petit entier k de $\mathbb{N}^*$ tel que $T_k \leq T_0$ si un tel entier existe et égale à 0 sinon.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la variable aléatoire M_n par : $M_n = \min(T_1, \ldots, T_n)$.

   (a) Calculer, pour tout t de $\mathbb{R}_+$, $P(M_n > t)$.

   (b) En déduire la fonction de répartition de M_n sur $\mathbb{R}$.
   Reconnaître la loi de M_n et préciser son(ses) paramètre(s).

5. (a) Montrer : $P(N = 1) = P(T_1 \leq T_0) = \dfrac{1}{2}$.

   (b) Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ [N > n] = [M_n > T_0]$.
   En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une expression de $P(N > n)$ en fonction de n.

   (c) Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ P(N = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

   (d) En déduire la valeur de $P(N = 0)$.

6. La variable aléatoire N admet-elle une espérance?