Révisions 8

Sujet EDHEC

Exercice 1 (EDHEC 2009)

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1 : Un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$

On note e_0, e_1, e_2 les fonctions définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e_0(t) = 1, \quad e_1(t) = t, \quad e_2(t) = t^2.$$

On rappelle que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de l'espace vectoriel E constitué des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2.
On considère l'application f qui, à tout élément P de E associe $f(P) = P'' - 5P' + 6P$, où P' et P'' désignent respectivement les dérivées première et seconde de P.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Écrire la matrice A de f relativement à la base (e_0, e_1, e_2).
3. Établir que f est un automorphisme de E. En déduire $Ker(f)$.
4. Déterminer la seule valeur propre λ de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Partie 2 : Un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

On note F l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et Id l'endomorphisme identité de F.
On considère l'application g qui, à toute fonction u de F, associe $g(u) = u'' - 5u' + 6u$, où u' et u'' désignent respectivement les dérivées première et seconde de u.

5. Montrer que g est un endomorphisme de F.
6. Dans cette question, on se propose de déterminer $Ker\,(g - 6Id)$.
   (a) Résoudre l'équation différentielle $(\mathscr{E}_1)$: $u'' - 5u' = 0$.
   (b) En déduire que (u_1, u_2) est une base de $Ker\,(g - 6Id)$, où u_1 est la fonction constante égale à 1 et u_2 la fonction définie pour tout réel x par $u_2(x) = e^{5x}$.
7. Dans cette question, on se propose de déterminer $Ker\,(g)$.
   (a) Résoudre l'équation différentielle $(\mathscr{E}_2)$: $u'' - 5u' + 6u = 0$.
   (b) En déduire une base de $Ker(g)$.

Exercice 2 (EDHEC 2003)

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \ \dfrac{e^x - 1}{x} > 0$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$, puis préciser $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

4. Montrer que : $\lim_{x\to 0} f'(x) = \frac{1}{2}$.

   On admettra alors que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $f'(0) = \frac{1}{2}$.

5. (a) Étudier les variations de la fonction g définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = xe^x - e^x + 1$.

   (b) En déduire le signe de $g(x)$, puis dresser le tableau de variation de f (limites comprises).

On considère la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

6. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

7. (a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - x = f(-x)$.

   (b) En déduire le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (c) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

8. En déduire que (u_n) converge et donner sa limite.

9. Écrire un programme en `Python` permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n \leq 10^{-3}$, dans le cas où $u_0 = 1$.

Exercice 3 (EDHEC 2011)

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n, contenant chacune n boules. On répète n épreuves, chacune consistant à choisir une urne au hasard et à en extraire une boule au hasard. On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres.

Pour tout i de $\{1, 2, ..., n\}$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'urne numérotée i contient toujours n boules au bout de ces n épreuves, et qui prend la valeur 0 sinon.

1. (a) Pour tout i et tout k, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, on note $U_{i,k}$ l'événement "l'urne numéro i est choisie à la $k^{\text{ème}}$ épreuve".
   Ecrire l'événement $(X_i = 1)$ à l'aide de certains des événements $U_{i,k}$, puis montrer que :
   $$\forall i \in \{1, 2, ..., n\},\ P(X_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

   (b) Justifier également que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, on a :
   $$P([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n.$$

   (c) Comparer $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$ et $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$ et en déduire que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, alors les variables X_i et X_j en sont pas indépendantes.

2. On pose $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

   (a) Déterminer l'espérance de Y_n, notée $E(Y_n)$.

   (b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} \frac{E(Y_n)}{n}$ et donner un équivalent de $E(Y_n)$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

3. Pour tout i de $\{1, 2, ..., n\}$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de boules manquantes dans l'urne numérotée i à la fin de ces n épreuves.

   (a) Donner sans calcul la loi de N_i ainsi que la valeur de $E(N_i)$.

   (b) Que vaut le produit $N_i X_i$?

   (c) Les variables N_i et X_i sont-elles indépendantes ?

4. Compléter le programme informatique suivant pour qu'il simule l'expérience décrite au début de cet exercice et affiche les valeurs prises par X_1 et N_1 pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n = int(input('Donner un entier n superieur ou egal a 2'))
x1 = 1
n1 = 0
for k in range(n):
  hasard = np.floor(rd.random()*n) + 1
  if hasard == 1:
    x1 = .....
    n1 = .....
print(x1, n1)
```

Exercice 4 (EDHEC 2014)

1. Soit x un réel quelconque.

   (a) Justifier que la fonction $t \mapsto \max(t, x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

   On considère maintenant l'intégrale $y = \displaystyle\int_0^1 \max(x, t)dt$.

   (b) Montrer que $y = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } x \leq 0, \\ \dfrac{x^2+1}{2} & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ x & \text{si } x > 1. \end{cases}$

Dans la suite du problème, on considère une variable aléatoire X définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

On admet que l'on définit une variable aléatoire Y, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, en posant $Y = \displaystyle\int_0^1 \max(X, t)dt$, ce qui signifie que, pour tout ω de Ω, on a :

$$Y(\omega) = \int_0^1 \max(X(\omega), t)dt.$$

On note F_Y la fonction de répartition de Y.

On se propose dans la suite de déterminer la loi de Y connaissant celle de X.

2. Vérifier que si X suit une loi géométrique alors on a : $Y = X$.

3. On suppose, dans cette question, que $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et que l'on a :

$$P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{4}.$$

   (a) Déterminer la valeur de $P(X = 0)$.

   (b) Vérifier que $Y(\Omega) = \left\{\dfrac{1}{2}, 1\right\}$ puis donner la loi de Y.

(c) Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire Y.

```
def SimulY():
    if ..... :
        y = .....
    else:
        y = .....
    return(y)
```

4. On suppose, dans cette question, que X suit la loi uniforme sur $[0;1[$, avec $X(\Omega) = [0;1[$.

(a) Vérifier, en utilisant la première question, que l'on a : $Y = \dfrac{X^2+1}{2}$.

(b) En déduire que $Y(\Omega) = \left[\dfrac{1}{2}, 1\right[$.

(c) Montrer alors que, pour tout x de $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right[$, on a : $F_Y(x) = \sqrt{2x-1}$.

(d) Expliquer pourquoi Y est une variable à densité.

(e) Donner la valeur de $E(Y)$.

(f) Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire Y.

```
def SimulY():
    x = .....
    y = .....
    return(y)
```

5. On suppose, dans cette question, que X suit la loi normale centrée réduite. On rappelle que $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et on note Φ la fonction de répartition de X.

(a) Vérifier que $Y(\Omega) = \left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$.

(b) Donner la valeur de $P\left(Y = \dfrac{1}{2}\right)$.

(c) Utiliser la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements

$$([X \leq 0], [0 < X \leq 1], [X > 1])$$

pour établir l'égalité suivante :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \dfrac{1}{2}, \\ \Phi(\sqrt{2x-1}) & \text{si } \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ \Phi(x) & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

(d) La variable aléatoire Y est-elle à densité ? Est-elle discrète ?